

Contexte d'explication de préférences : comment expliquer et à quelles fins ?

Manuel Amoussou¹, Nicolas Maudet¹,
Khaled Belahcene², Vincent Mousseau², Wassila Ouerdane²

¹*Sorbonne Université, LIP6*

²*Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, MICS*

Exemple illustratif

4 items : 🍭 🍬 🍫 🍪

Une association qui constitue chaque week-end deux types de lots à offrir au choix.

Kermesse du week-end

n°1



:

n°2



:

n°3



:

n°4



:

Exemple illustratif

4 items : 🍬 🍭 🍫 🍪

Une association qui constitue chaque week-end deux types de lots à offrir au choix.

Kermesse du week-end

n°1



n°2



n°3



n°4



Exemple illustratif

4 items :    

Une association qui constitue chaque week-end deux types de lots à offrir au choix.

Kermesse du week-end

n°1



n°2



n°3



n°4



Exemple illustratif

4 items :    

Une association qui constitue chaque week-end deux types de lots à offrir au choix.

Kermesse du week-end

n°1



n°2



n°3



n°4



Exemple illustratif

4 items :    

Une association qui constitue chaque week-end deux types de lots à offrir au choix.

Kermesse du week-end

n°1



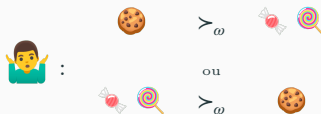
n°2



n°3



n°4





L'approche



Les fonctions



Perspectives

L'approche : application aux
relations d'ordre linéaire additives

Définition d'une ROLA [MacLagan, 1998]

- $\omega = (\omega_i)_{i \in [m]} \in \mathbb{N}^m$. e.g. $\omega = (\text{🍭} : 3, \text{🍭} : 4, \text{🍫} : 8, \text{🍪} : 10)$
- ω représente $\succ_\omega$ une **relation d'ordre linéaire additive**
- $\succ_\omega$ définie sur $2^{[m]}$
- x préféré à y si et seulement si $\sum_{i \in x} \omega_i > \sum_{j \in y} \omega_j$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{n°1} & \text{🍭} & \succ_\omega \text{🍭} \\ \text{n°2} & \text{🍫} & \succ_\omega \text{🍭} \text{🍭} \\ \text{n°3} & \text{🍭} \text{🍪} & \succ_\omega \text{🍭} \text{🍫} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} & 4 & > 3 \\ & 8 & > 3 + 4 = 7 \\ 13 = 3 + 10 & > & 4 + 8 = 12 \end{array} \right\}$$

On a aussi $\text{🍪} \succ_\omega \text{🍭} \text{🍭}$ comme $10 > 3 + 4$.

Kermesse du week-end

n°1



n°2



n°3



n°4



Kermesse du week-end

n°1

$$\begin{array}{c} \text{👤} : \text{🍭} \succ_{\omega} \text{🍬} \\ (4 > 3) \end{array}$$

n°2

$$\begin{array}{c} \text{👤} : \text{🍫} \succ_{\omega} \text{🍬} \text{🍭} \\ (8 > 7) \end{array}$$

n°3

$$\begin{array}{c} \text{👤} : \text{🍬} \text{🍪} \succ_{\omega} \text{🍭} \text{🍫} \\ (13 > 12) \end{array}$$

n°4

$$\begin{array}{c} \text{👤} : \text{🍪} \succ_{\omega} \text{🍬} \text{🍭} \\ (10 > 7) \end{array}$$

Expliquer en exhibant $\omega = \left(\text{🍬} : 3, \text{🍭} : 4, \text{🍫} : 8, \text{🍪} : 10 \right) !$

Intuitif?

« (Elle) ne fait pas appel à l'*intuition* » ([Klein, 1994])

Axiome 1. $\succ$ sur $2^{[m]}$ est une relation d'ordre linéaire.

Axiome 2. $x \succ \emptyset$ pour tout $x \in 2^{[m]} \setminus \{\emptyset\}$.

Axiome 3. Pour tout $k \geq 2$ et tout $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$, si

$$|j : i \in u_j| = |j : i \in v_j| \text{ pour tout } i \in [m] \quad (1)$$

alors

$$\bigwedge_{j \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket} u_j \succ v_j \implies v_k \succ u_k \quad (2)$$

Axiome 3. Pour tout $k \geq 2$ et tout $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$, si

$$|j : \mathbf{i} \in u_j| = |j : \mathbf{i} \in v_j| \text{ pour tout } \mathbf{i} \in [m] \quad (1)$$

alors

$$\bigwedge_{j \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket} u_j \succ v_j \implies v_k \succ u_k \quad (2)$$

Définition axiomatique d'une ROLA [Fishburn et al., 2002]

Axiome 3. Pour tout $k \geq 2$ et tout $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$, si

$$|j : i \in u_j| = |j : i \in v_j| \text{ pour tout } i \in [m] \quad (1)$$

alors

$$\bigwedge_{j \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket} u_j \succ v_j \implies v_k \succ u_k \quad (2)$$

Pourquoi n°4 :  $\succ_\omega$   ?

 : 2 #  : 2 #  : 1 #  : 1

u_1			v_1
u_2			v_2
u_3	 	 	v_3
u_4	 		v_4

$$\omega = \left(\text{candy} : 3, \text{lollipop} : 4, \text{candy} : 8, \text{cookie} : 10 \right)$$

Axiome 3. Pour tout $k \geq 2$ et tout $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$, si

$$|j : i \in u_j| = |j : i \in v_j| \text{ pour tout } i \in [m] \quad (1)$$

alors

$$\bigwedge_{j \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket} u_j \succ v_j \implies v_k \succ u_k \quad (2)$$

Pourquoi n°4 :  $\succ_\omega$   ?

 : 2 #  : 2 #  : 1 #  : 1

u_1		$\succ_\omega$		v_1
u_2		$\succ_\omega$	 	v_2
u_3	 	$\succ_\omega$	 	v_3
u_4	 			v_4

$$\omega = \left(\text{candy} : 3, \text{lollipop} : 4, \text{candy} : 8, \text{cookie} : 10 \right)$$

Définition axiomatique d'une ROLA [Fishburn et al., 2002]

Axiome 3. Pour tout $k \geq 2$ et tout $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$, si

$$|j : i \in u_j| = |j : i \in v_j| \text{ pour tout } i \in [m] \quad (1)$$

alors

$$\bigwedge_{j \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket} u_j \succ v_j \implies v_k \succ u_k \quad (2)$$

Pourquoi n°4 :  $\succ_\omega$   ?

 : 2 #  : 2 #  : 1 #  : 1

u_1		$\succ_\omega$		v_1
u_2		$\succ_\omega$	 	v_2
u_3	 	$\succ_\omega$	 	v_3
u_4	 	$\prec_\omega$		v_4

Intuitif?

$$\omega = \left(\text{candy} : 3, \text{lollipop} : 4, \text{candy} : 8, \text{cookie} : 10 \right)$$

Des instances familières, des raisonnements intuitifs

🍷 : 1 # 🍷 : 1 # 🍷 : 1 # 🍪 : 1

(i₁) 🍪 >_ω 🍷

(c₂) 🍷 >_ω 🍷 🍷

(c₄) 🍷 🍷 <_ω 🍪

🍷 : 1 # 🍷 : 1 # 🍷 : 1 # 🍪 : 1

(i₂) 🍷 🍷 🍷 <_ω 🍷 🍷 🍪

(i₁) 🍪 >_ω 🍷

🍷 : 2 # 🍷 : 2 # 🍷 : 1 # 🍪 : 1

(c₁) 🍷 >_ω 🍷

(c₃) 🍷 🍪 >_ω 🍷 🍷

(i₂) 🍷 🍷 🍷 <_ω 🍷 🍷 🍪

Des instances familières, des raisonnements intuitifs

$$\begin{array}{l}
 \# \text{🍭} : 1 \quad \# \text{🍭} : 1 \quad \# \text{🍬} : 1 \quad \# \text{🍪} : 1 \\
 (i_1) \quad \text{🍪} >_{\omega} \text{🍬} \\
 (c_2) \quad \text{🍬} >_{\omega} \text{🍭} \\
 \hline
 (c_4) \quad \text{🍭} <_{\omega} \text{🍪}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \# \text{🍭} : 1 \quad \# \text{🍭} : 1 \quad \# \text{🍬} : 1 \quad \# \text{🍪} : 1 \\
 (i_2) \quad \text{🍭} <_{\omega} \text{🍬} \\
 \hline
 (i_1) \quad \text{🍪} >_{\omega} \text{🍬}
 \end{array}$$

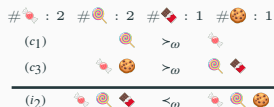
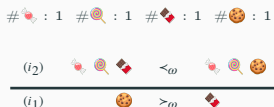
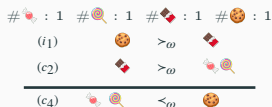
$$\begin{array}{l}
 \# \text{🍭} : 2 \quad \# \text{🍭} : 2 \quad \# \text{🍬} : 1 \quad \# \text{🍪} : 1 \\
 (c_1) \quad \text{🍭} >_{\omega} \text{🍬} \\
 (c_3) \quad \text{🍭} >_{\omega} \text{🍪} \\
 \hline
 (i_2) \quad \text{🍭} <_{\omega} \text{🍬}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Si} \\
 \text{🍪} >_{\omega} \text{🍬} \quad \text{et} \\
 \text{🍬} >_{\omega} \text{🍭} \\
 \text{alors} \\
 \text{🍪} >_{\omega} \text{🍭}
 \end{array}$$

Transitivité

« si l'alternative x est préférée à l'alternative y et l'alternative y à l'alternative z , alors x doit être préférée à z . »

Des instances familières, des raisonnements intuitifs



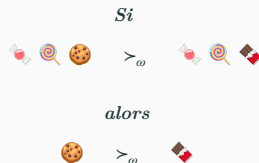
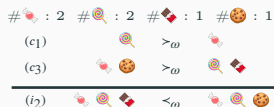
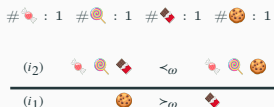
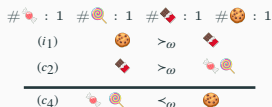
Transitivité

« si l'alternative x est préférée à l'alternative y et l'alternative y à l'alternative z , alors x doit être préférée à z . »

Congruence

« les préférences doivent être indépendantes de l'ajout ou du retrait d'items-tiers. »

Des instances familières, des raisonnements intuitifs



Transitivité

« si l'alternative x est préférée à l'alternative y et l'alternative y à l'alternative z , alors x doit être préférée à z . »

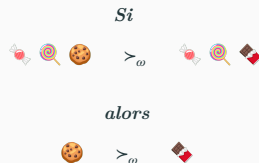
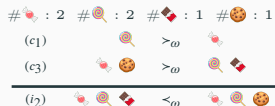
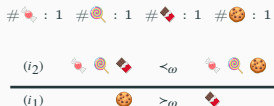
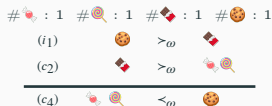
Congruence

« les préférences doivent être indépendantes de l'ajout ou du retrait d'items-tiers. »

Couverture

« La composition des ensembles d'items préférés est préférée à celle des items moins préférés. »

Des instances familières, des raisonnements intuitifs



Transitivité

« si l'alternative x est préférée à l'alternative y et l'alternative y à l'alternative z, alors x doit être préférée à z. »

Congruence

« les préférences doivent être indépendantes de l'ajout ou du retrait d'items-tiers. »

Couverture

« La composition des ensembles d'items préférés est préférée à celle des items moins préférés. »

L'**Axiome 3**. et ses conditions nécessaires , ,  ...

Leur combinaison est-elle suffisante ?

Leur combinaison (■, ▲, ▼) est-elle suffisante ?

Une nouvelle approche de l'explication d'une comparaison par paire
d'alternatives basée sur la définition explicite d'un

CONTEXTE

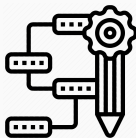
Une relation binaire



Une base de référence

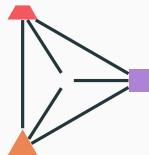


Un schéma déductif



$$\omega = (\text{candy} : 3, \text{candy} : 4, \text{candy} : 8, \text{candy} : 10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{n°1} \quad \text{candy} >_{\omega} \text{candy} \\ \text{n°2} \quad \text{candy} >_{\omega} \text{candy} \\ \text{n°3} \quad \text{candy} >_{\omega} \text{candy} \end{array} \right\}$$



Explication preuve de déduction suivant un schéma

■ Transitivité ($k\text{-Tr}^>$) et Couverture ($k\text{-Cov}^>$) ▲

Séquences (*instances*) $u_1 > v_1, \dots, u_k > v_k$ ($k \geq 2$) vérifiant les règles de déduction :

$u_{j+1} = v_j$ pour tout $1 \leq j < k$ et $u_j \cap u_{j'} = v_j \cap v_{j'} = \emptyset$ pour tous $j \neq j'$

et impliquant une conclusion **unique** par application des propriétés respectives :

$$u_1 > v_k \text{ et } \bigcup_{j \in \llbracket 1; k \rrbracket} u_j > \bigcup_{j \in \llbracket 1; k \rrbracket} v_j$$

e.g.

■ Transitivité ($k\text{-Tr}^>$) et Couverture ($k\text{-Cov}^>$) ▲

Séquences (instances) $u_1 > v_1, \dots, u_k > v_k$ ($k \geq 2$) vérifiant les règles de déduction :

$u_{j+1} = v_j$ pour tout $1 \leq j < k$ et $u_j \cap u_{j'} = v_j \cap v_{j'} = \emptyset$ pour tous $j \neq j'$

et impliquant une conclusion **unique** par application des propriétés respectives :

$$u_1 > v_k \text{ et } \bigcup_{j \in [1; k]} u_j > \bigcup_{j \in [1; k]} v_j$$

e.g.

Instance $\overbrace{(\text{cookie} >_{\omega} \text{chocolat}, \text{chocolat} >_{\omega} \text{bonbon})}^{(i_1)}$, $\overbrace{(\text{chocolat} >_{\omega} \text{bonbon}, \text{bonbon} >_{\omega} \text{caramel})}^{(i_2)}$ de conclusion $\overbrace{(\text{cookie} >_{\omega} \text{caramel})}^{(c_4)}$ et appartenant au mécanisme $2\text{-Tr}^>_{\omega}$.

Si

 $>_{\omega}$  et  $>_{\omega}$  

alors

 $>_{\omega}$  

■ Transitivité ($k\text{-Tr}^\succ$) et Couverture ($k\text{-Cov}^\succ$) ▲

Séquences (instances) $u_1 \succ v_1, \dots, u_k \succ v_k$ ($k \geq 2$) vérifiant les règles de déduction :

$$u_{j+1} = v_j \text{ pour tout } 1 \leq j < k \text{ et } u_j \cap u_{j'} = v_j \cap v_{j'} = \emptyset \text{ pour tous } j \neq j'$$

et impliquant une conclusion **unique** par application des propriétés respectives :

$$u_1 \succ v_k \text{ et } \bigcup_{j \in [1; k]} u_j \succ \bigcup_{j \in [1; k]} v_j$$

e.g.

Instance $\overbrace{(\text{c1})}^{\text{c1}} (\text{c2}) \text{ de conclusion } \overbrace{(i2)}^{i2} \text{ et appartenant au mécanisme } 2\text{-Cov}^\succ_\omega.$

Si

$$\begin{array}{ccc} \text{c1} & \succ_\omega & \text{c2} \\ \text{c2} & \succ_\omega & \text{c3} \end{array} \text{ et}$$

alors

$$\text{c1} \text{ c2} \text{ c3} \succ_\omega \text{ i2}$$

▲ Congruence ($z\text{-Cg}^{\succ}$)

Instances $u \succ v$ dont l'ensemble des items spécifiques $u \setminus v \cup v \setminus u$ est disjoint de z et impliquant la conclusion **unique** $\tilde{u} \cup z \succ \tilde{v} \cup z$ par application de la propriété :

$$u \succ v \implies \tilde{u} \cup z \succ \tilde{v} \cup z \quad \forall u, v, z \in 2^{[m]} \text{ où } \tilde{u} = u \setminus v \text{ et } \tilde{v} = v \setminus u$$

e.g.

▲ Congruence ($z\text{-Cg}^{\succ}$)

Instances $u \succ v$ dont l'ensemble des items spécifiques $u \setminus v \cup v \setminus u$ est disjoint de z et impliquant la conclusion **unique** $\tilde{u} \cup z \succ \tilde{v} \cup z$ par application de la propriété :

$$u \succ v \implies \tilde{u} \cup z \succ \tilde{v} \cup z \quad \forall u, v, z \in 2^{[m]} \text{ où } \tilde{u} = u \setminus v \text{ et } \tilde{v} = v \setminus u$$

e.g.

Instance $\overbrace{\text{🍭 🍭 🍪} \succ_{\omega} \text{🍭 🍭 🍪}}^{(i_2)}$ de conclusion $\overbrace{\text{🍪} \succ_{\omega} \text{🍫}}^{(i_1)}$ et appartenant au mécanisme $\emptyset\text{-Cg}^{\succ \omega}$.

Si



alors





Soient des comparaisons par paire de $\succ$ considérées comme **admises**.

... L'explication, une opération de déduction récursive.

Explication suivant le schéma déductif $tr/cg/cov$

$x \succ y$ s'explique suivant $tr/cg/cov$ si il existe une **instance** $(u_1 \succ v_1, \dots, u_k \succ v_k)$ d'un mécanisme $k-Tr^\succ$ dont la conclusion est $x \succ y$ et dont au moins une comparaison par paire $u_j \succ v_j$ s'explique suivant le schéma cg/cov ; les autres comparaisons étant **admises**.



Soient des comparaisons par paire de $\succ$ considérées comme **admises**.

... L'explication, une opération de déduction récursive.

Explication suivant le schéma déductif cg/cov

$x \succ y$ s'explique suivant cg/cov si il existe une instance $u \succ v$ d'un mécanisme $z-Cg^>$ dont la conclusion est $x \succ y$ et telle que $u \succ v$ s'explique suivant le schéma cov .



Soient des comparaisons par paire de $\succ$ considérées comme **admises**.

... L'explication, une opération de déduction récursive.

*Explication suivant le schéma déductif **cov***

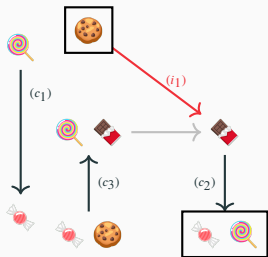
$x \succ y$ s'explique suivant **cov** si il existe une **instance** $(u_1 \succ v_1, \dots, u_k \succ v_k)$ **d'un mécanisme $k\text{-Cov}$** dont la conclusion est $x \succ y$ et telle que chaque comparaison par paire $u_j \succ v_j$ est **admise**.

Des algorithmes pour le calcul

3 familles d'algorithmes

$\mathcal{T}_r$

Recherche d'un chemin
entre x et y dans un
graphe



admise (Pareto)
 admise
 cg/cov -explicable

$\mathcal{C}_g$

Énumération des
comparaisons par paire
congruentes à (x, y)

$$(i_1) \text{ cookie} >_{\omega} \text{chocolat}$$

$$\text{candy} >_{\omega} \text{cookie}$$

$$\text{candy} >_{\omega} \text{candy}$$

$$(i_2) \text{ candy, candy, cookie} >_{\omega} \text{candy, candy, chocolat}$$

cov-explicable

$\mathcal{C}_{or}$

Résolution d'un PLNE

Variables (booléennes) :
 b_j pour tout $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$

Contraintes :

$$\sum_{j \in \llbracket 1; k \rrbracket : i \in u_j} b_j = 0 \text{ pour tout } i \notin x \quad (3)$$

$$\sum_{j \in \llbracket 1; k \rrbracket : i \in v_j} b_j = 0 \text{ pour tout } i \notin y \quad (4)$$

$$\sum_{j \in \llbracket 1; k \rrbracket : i \in u_j} b_j \leq 1 \text{ pour tout } i \in x \quad (5)$$

$$\sum_{j \in \llbracket 1; k \rrbracket : i \in u_j} b_j = 1 \text{ pour tout } i \in y \quad (6)$$

$$b_{(c_1)} \text{candy} >_{\omega} \text{candy} = 1$$

$$b_{(c_2)} \text{chocolat} >_{\omega} \text{candy} = 0$$

$$b_{(c_3)} \text{candy, cookie} >_{\omega} \text{candy, chocolat} = 1$$

Représentations de l'explication



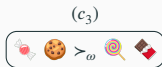
tr/cg/cov

The text *tr/cg/cov* is displayed in a stylized font. To its right is a light gray icon of a gear connected to a circuit board with several components.

Représentations de l'explication



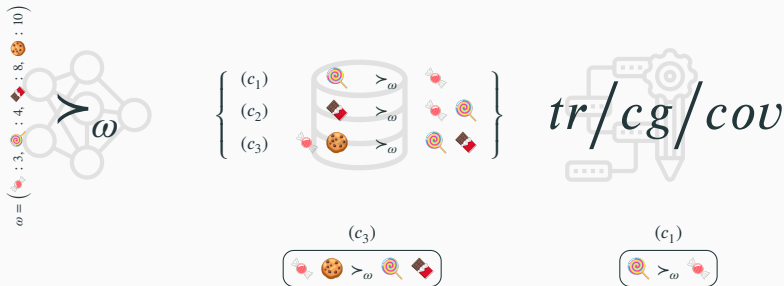
tr/cg/cov



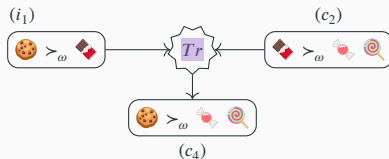
🍪 est préférée à 🍬 car la comparaison par paire correspondante se déduit, par



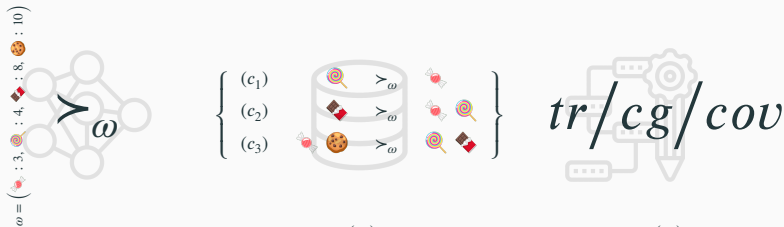
Représentations de l'explication



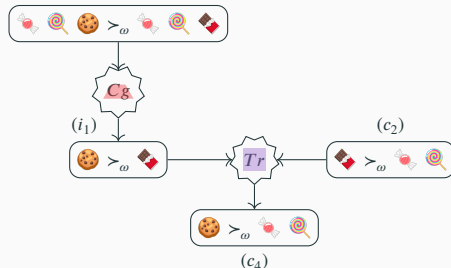
🍪 est préférée à 🍬 car la comparaison par paire correspondante se déduit, par **transitivité**, de $\text{🍪} >_{\omega} \text{🍫}$ (non admise) et $\text{🍫} >_{\omega} \text{🍬}$ (admise) où $\text{🍪} >_{\omega} \text{🍫}$ se



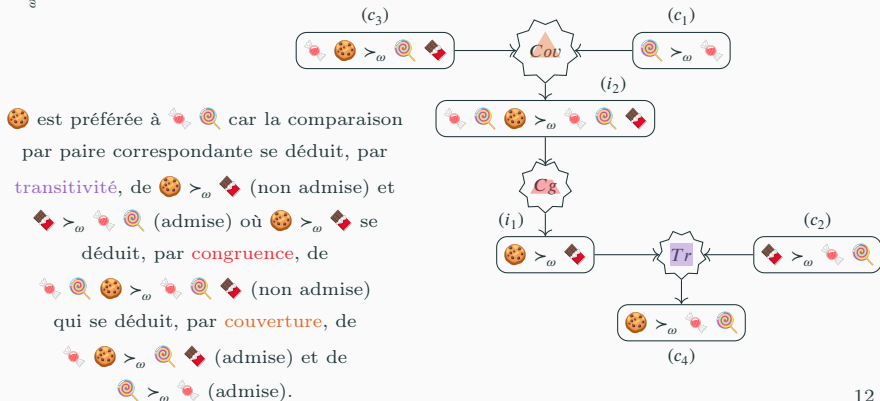
Représentations de l'explication



🍪 est préférée à 🍬 🍭 car la comparaison par paire correspondante se déduit, par **transitivité**, de 🍪 $\succ_{\omega}$ 🍬 (non admise) et 🍬 $\succ_{\omega}$ 🍭 (admise) où 🍪 $\succ_{\omega}$ 🍬 se déduit, par **congruence**, de 🍬 🍭 🍪 $\succ_{\omega}$ 🍬 🍭 🍬 (non admise)



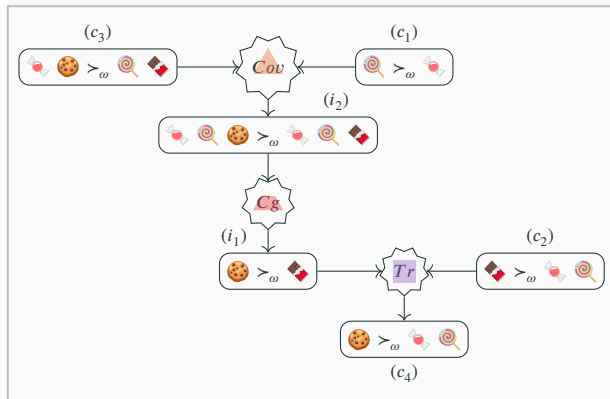
Représentations de l'explication



Les fonctions de l'explication



Fonction n°1 : Justifier

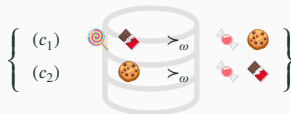


Pourquoi préférer  à   ?





Fonction n°2 : Éliciter



ω^1	3	8	6	10	ω^9	1	8	4	6
ω^2	2	8	1	4	ω^{10}	3	10	4	8
ω^3	2	10	3	6	ω^{11}	4	10	3	8
ω^4	3	10	2	6	ω^{12}	2	7	4	8
ω^5	2	10	4	7	ω^{13}	2	8	4	7
ω^6	4	10	2	7	ω^{14}	2	6	7	10
ω^7	1	4	6	8	ω^{15}	2	7	6	10
ω^8	1	6	4	8	ω^{16}	1	8	2	4

$$\omega \in \{\omega^k\}, k \in \llbracket 1; 16 \rrbracket$$



Fonction n°2 : Éliciter



ω^1	3	8	6	10	ω^9	1	8	4	6
ω^2	2	8	1	4	ω^{10}	3	10	4	8
ω^3	2	10	3	6	ω^{11}	4	10	3	8
ω^4	3	10	2	6	ω^{12}	2	7	4	8
ω^5	2	10	4	7	ω^{13}	2	8	4	7
ω^6	4	10	2	7	ω^{14}	2	6	7	10
ω^7	1	4	6	8	ω^{15}	2	7	6	10
ω^8	1	6	4	8	ω^{16}	1	8	2	4

$$\omega \in \{\omega^k\}, k \in \llbracket 1; 16 \rrbracket$$

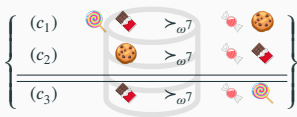
Remarque : ω^7 représente la seule ROLA dans laquelle est préférée à .



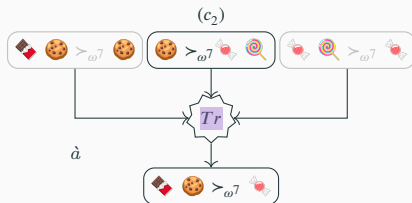
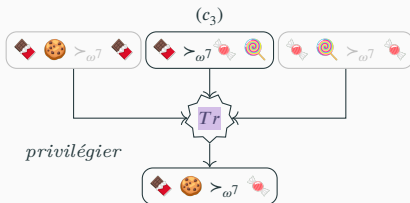
Fonction n°2 : Éliciter

$$\omega^7 = (c_1 : 1, c_2 : 4, c_3 : 6, c_4 : 8)$$

ω^7

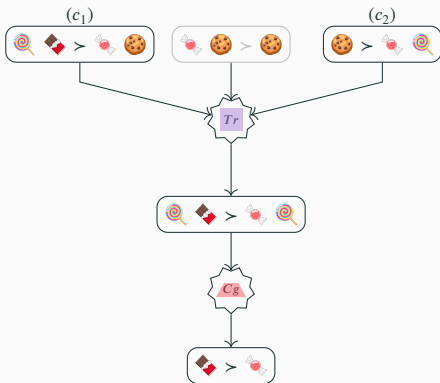


Pour expliquer pourquoi préférer   à ,



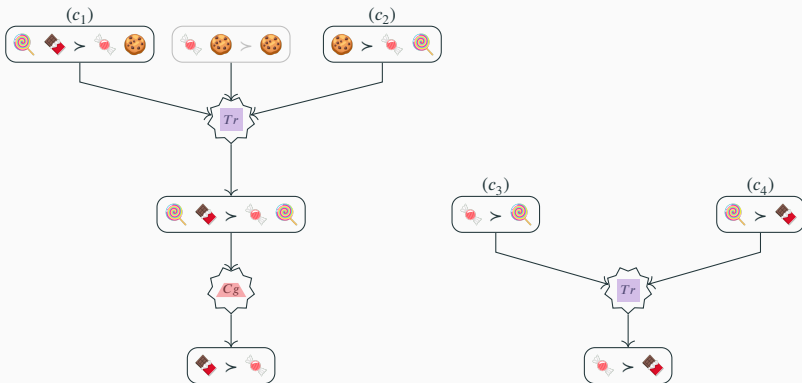


Fonction n°3 : Servir à la résolution d'inconsistance





Fonction n°3 : Servir à la résolution d'inconsistance



... en expliquant des propositions contradictoires !

Perspectives

Mieux connaître/comprendre les ROLA (1/2)



$CR_{>\omega}$: Comparaisons par paire disjointes adjacentes ([Fishburn et al., 2002])

		Tous mécanismes compatibles imaginables	
m	4	100%	100%
	5	100%	100%
	6	100%	100%

Proportion des ROLA intégralement déduites à partir de $CR_{>\omega}$

Mieux connaître/comprendre les ROLA (2/2)



$\mathbb{CR}_{>\omega}^*$: Comparaisons par paire disjointes adjacentes non déductibles

		Tous mécanismes compatibles imaginables	
m	4	100%	100%
	5	100%	80,6%
	6	100%	43,4%

Proportion des ROLA intégralement déduites à partir de $\mathbb{CR}_{>\omega}^*$

Les questions qui se posent...



Quid du cas $m = 7$?



Situer les préférences d'utilisateurs/décideurs réels ?



D'autres mécanismes intuitifs ?





Fishburn, P. C., Pekec, A., and Reeds, J. A. (2002).
subset comparisons for additive linear orders.
Mathematics of Operations Research, 27:227–243.



Klein, D. A. (1994).
Decision-Analytic Intelligent Systems : Automated Explanation
and Knowledge Acquisition.
L. Erlbaum Associates Inc., USA.



MacLagan, D. (1998).
Boolean term orders and the root system B_n .
Order, 15:279–295.