Explications en aide multicritère à la décision :

schémas déductifs, algorithmes et expérimentations

Manuel AMOUSSOU

11/12/23

Soutenance de thèse

Université Paris-Saclay

Ma thèse en 1 question

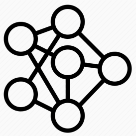
Comment expliquer que x est préférée y ?

Ma thèse en 3 colonnes

Explications en aide multicritère à la décision : schémas déductifs, algorithmes et expérimentations

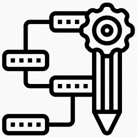
Une nouvelle approche de l'explication d'une comparaison par paire d'alternatives basée sur la définition explicite d'un CONTEXTE

Une relation binaire



Une base de référence

Un schéma déductif



Explication fondée sur un modèle de décision

Explication preuve de déduction

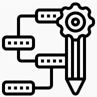
Plan

1. Application aux relations d'ordre linéaire additives

   Définitions des ROLA et Explications

   Définition des schémas déductifs

   Expérimentations numériques



2. Application aux problèmes de choix sur espace binaire de critères

   Cadre de décision

   La relation nécessaire

   Expérimentations numériques

3. Conclusion et perspectives

   Application à une procédure d'agrégation de préférences ?

   Connaît-on vraiment suffisamment le modèle additif ?

   Quid de l'inconsistance ?

Application aux relations d’ordre linéaire additives

Sommaire

Historique 1

(r_1) 🍎 $\succ_\omega$ 🧀
(r_2) 🧀 🥗 $\succ_\omega$ 🍝
(r_3) 🥗 $\succ_\omega$ 🧀 🍎
(r_4) 🧀 🍝 $\succ_\omega$ 🍎 🥗

$\Longrightarrow$ (e_3) 🍝 $\succ_\omega$ 🧀🍎

(e_5) 🍝 🍾 $\succ_{\omega'}$ 🧀 🍎 🥗 $\Longleftarrow$

Historique 2

(r_1) 🍎 $\succ_{\omega'}$ 🧀
$(\tilde{r}_2)$ 🍾 $\succ_{\omega'}$ 🍎 🥗 🍝
(r_3) 🥗 $\succ_{\omega'}$ 🧀 🍎
(r_4) 🧀 🍝 $\succ_{\omega'}$ 🍎 🥗

Raisonnements intuitifs - Mécanismes de déduction - Évolution du contexte

Définition d'une ROLA [Maclagan, 1998]

- $\omega = (\omega_{\mathtt{i}})_{\mathtt{i} \in [m]} \in \mathbb{N}^m$. e.g. $\omega = ($🧀 : 3, 🍎 : 4, 🥗 : 8, 🍝 : 10$)$
- ω représente $\succ_\omega$ une **relation d'ordre linéaire additive**
- $\succ_\omega$ définie sur $2^{[m]}$
- x préféré à y si et seulement si $\sum_{\mathtt{i} \in x} \omega_{\mathtt{i}} > \sum_{\mathtt{j} \in y} \omega_{\mathtt{j}}$

(r_1)	🍎	$\succ_\omega$	🧀
(r_2)	🧀 🥗	$\succ_\omega$	🍝
(r_3)	🥗	$\succ_\omega$	🧀 🍎
(r_4)	🧀 🍝	$\succ_\omega$	🍎 🥗

Définition d’une ROLA [Maclagan, 1998]

- $\omega = (\omega_{\mathtt{i}})_{\mathtt{i} \in [m]} \in \mathbb{N}^m$. e.g. $\omega = \left(\text{🧀} : 3, \text{🍎} : 4, \text{🥗} : 8, \text{🍝} : 10\right)$
- ω représente $\succ_\omega$ une **relation d’ordre linéaire additive**
- $\succ_\omega$ définie sur $2^{[m]}$
- x préféré à y si et seulement si $\sum_{\mathtt{i} \in x} \omega_{\mathtt{i}} > \sum_{\mathtt{j} \in y} \omega_{\mathtt{j}}$

$$\left\{ \begin{array}{llcl} (r_1) & \text{🍎} & \succ_\omega & \text{🧀} \\ (r_2) & \text{🧀🥗} & \succ_\omega & \text{🍝} \\ (r_3) & \text{🥗} & \succ_\omega & \text{🧀🍎} \\ (r_4) & \text{🧀🍝} & \succ_\omega & \text{🍎🥗} \end{array} \right\}$$

« (e_3) 🍝 $\succ_\omega$ 🧀🍎 car $10 > 3 + 4$ » ne fait pas appel à l’***intuition***
([Klein, 1994])

Définition axiomatique d'une ROLA [Fishburn et al., 2002]

Axiome 1. $\succ$ sur $2^{[m]}$ est une relation d'ordre linéaire.

Axiome 2. $x \succ \varnothing$ pour tout $x \in 2^{[m]} \backslash \{\varnothing\}$.

Axiome 3. Pour tout $k \geq 2$ et tout $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$, si

$$\left| j : \mathtt{i} \in u_j \right| = \left| j : \mathtt{i} \in v_j \right| \text{ pour tout } \mathtt{i} \in [m] \tag{1}$$

alors

$$\bigwedge_{j \in [\![1; k-1]\!]} u_j \succ v_j \Longrightarrow v_k \succ u_k \tag{2}$$

Définition axiomatique d'une ROLA [Fishburn et al., 2002]

Axiome 3. Pour tout $k \geq 2$ et tout $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$, si

$$\left| j : \mathtt{i} \in u_j \right| = \left| j : \mathtt{i} \in v_j \right| \text{ pour tout } \mathtt{i} \in [m] \tag{1}$$

alors

$$\bigwedge_{j \in [\![1; k-1]\!]} u_j \succ v_j \Longrightarrow v_k \succ u_k \tag{2}$$

. . . à la base de

[Labreuche et al., 2012, Kadzinski et al., 2014, Belahcène et al., 2019]

Définition axiomatique d'une ROLA [Fishburn et al., 2002]

Axiome 3. Pour tout $k \geq 2$ et tout $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$, si

$$\left| j : \mathtt{i} \in u_j \right| = \left| j : \mathtt{i} \in v_j \right| \text{ pour tout } \mathtt{i} \in [m] \tag{1}$$

alors

$$\bigwedge_{j \in [\![1; k-1]\!]} u_j \succ v_j \implies v_k \succ u_k \tag{2}$$

Pourquoi (e_3) 🍝 $\succ_\omega$ 🧀🍎 ?

#🧀 : 2 #🍎 : 2 #🥗 : 1 #🍝 : 1

u_1		🍎	🧀		v_1
u_2		🥗	🧀	🍎	v_2
u_3	🧀	🍝	🍎	🥗	v_3
u_4	🧀	🍎	🍝		v_4

$\omega = \big($🧀 : 3, 🍎 : 4, 🥗 : 8, 🍝 : 10$\big)$

Axiome 3. Pour tout $k \geq 2$ et tout $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$, si

$$\left|j : \mathtt{i} \in u_j\right| = \left|j : \mathtt{i} \in v_j\right| \text{ pour tout } \mathtt{i} \in [m] \tag{1}$$

alors

$$\bigwedge_{j \in [\![1; k-1]\!]} u_j \succ v_j \Longrightarrow v_k \succ u_k \tag{2}$$

Pourquoi (e_3) 🍝 $\succ_\omega$ 🧀🍎 ?

#🧀 : 2 #🍎 : 2 #🥗 : 1 #🍝 : 1

u_1		🍎	$\succ_\omega$	🧀		v_1
u_2		🥗	$\succ_\omega$	🧀	🍎	v_2
u_3	🧀	🍝	$\succ_\omega$	🍎	🥗	v_3
u_4	🧀	🍎		🍝		v_4

$\omega = \big($🧀 : 3, 🍎 : 4, 🥗 : 8, 🍝 : 10$\big)$

Axiome 3. Pour tout $k \geq 2$ et tout $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$, si

$$\left|j : \mathtt{i} \in u_j\right| = \left|j : \mathtt{i} \in v_j\right| \text{ pour tout } \mathtt{i} \in [m] \tag{1}$$

alors

$$\bigwedge_{j \in [\![1; k-1]\!]} u_j \succ v_j \Longrightarrow v_k \succ u_k \tag{2}$$

Pourquoi (e_3) 🍝 $\succ_\omega$ 🧀🍎 ?

#🧀 : 2 #🍎 : 2 #🥗 : 1 #🍝 : 1

u_1		🍎	$\succ_\omega$	🧀		v_1
u_2		🥗	$\succ_\omega$	🧀	🍎	v_2
u_3	🧀	🍝	$\succ_\omega$	🍎	🥗	v_3
u_4	🧀	🍎	$\prec_\omega$	🍝		v_4

Intuitif?

$\omega = \big($🧀 : 3, 🍎 : 4, 🥗 : 8, 🍝 : 10$\big)$

Axiome 3. en action et la question de l'explication

Axiome 3.

#🧀 : 2 #🍎 : 2 #🥗 : 1 #🍝 : 1

(r_1) 🍎 $\succ_\omega$ 🧀
(r_3) 🥗 $\succ_\omega$ 🧀 🍎
(r_4) 🧀 🍝 $\succ_\omega$ 🍎 🥗

🧀 🍎 $\prec_\omega$ 🍝 (e_3)

#🧀 : 2 #🍎 : 2 #🥗 : 1 #🍝 : 1

(r_1) 🍎 $\succ_\omega$ 🧀
(r_4) 🧀 🍝 $\succ_\omega$ 🍎 🥗

🧀 🍎 🥗 $\prec_\omega$ 🧀 🍎 🍝 (e_2)

#🧀 : 1 #🍎 : 1 #🥗 : 1 #🍝 : 1

(e_2) 🧀 🍎 🍝 $\succ \omega$ 🧀 🍎 🥗

🥗 $\prec_\omega$ 🍝 (e_1)

#🧀 : 1 #🍎 : 1 #🥗 : 1 #🍝 : 1

(e_1) 🍝 $\succ_\omega$ 🥗
(r_3) 🥗 $\succ_\omega$ 🧀🍎

🧀 🍎 $\prec_\omega$ 🍝 (e_3)

$\omega =$ (🧀 : 3, 🍎 : 4, 🥗 : 8, 🍝 : 10)

Des raisonnements-propriétés intuitifs

Transitivité

« si l'alternative x est préférée à l'alternative y et l'alternative y à l'alternative z, alors x doit être préférée à z. »

Si

🍝 $\succ_\omega$ 🥗 et

🥗 $\succ_\omega$ 🧀🍎

alors

🍝 $\succ_\omega$ 🧀🍎

(e_1)	🍝	$\succ_\omega$	🥗
(r_3)	🥗	$\succ_\omega$	🧀🍎
(e_3)	🧀🍎	$\prec_\omega$	🍝

Congruence

« les préférences doivent être indépendantes de l'ajout ou du retrait d'items-tiers. »

Si

🧀🍎🍝 $\succ_\omega$ 🧀🍎🥗

alors

🍝 $\succ_\omega$ 🥗

(e_2)	🧀🍎🥗	$\prec_\omega$	🧀🍎🍝
(e_1)	🍝	$\succ_\omega$	🥗

Couverture

« La composition des ensembles d'items préférés est préférée à celle des items moins préférés. »

Si

🍎 $\succ_\omega$ 🧀 et

🧀🍝 $\succ_\omega$ 🍎🥗

alors

🧀🍎🍝 $\succ_\omega$ 🧀🍎🥗

(r_1)	🍎	$\succ_\omega$	🧀
(r_4)	🧀🍝	$\succ_\omega$	🍎🥗
(e_2)	🧀🍎🥗	$\prec_\omega$	🧀🍎🍝

L'**Axiome 3.** et ses conditions nécessaires ■, ▲, ⏢, …

Leur combinaison est-elle suffisante ?

Sommaire

Mécanismes de déduction (1/2)

Transitivité (k-$\mathsf{Tr}^{\succ}$) et Couverture (k-$\mathsf{Cov}^{\succ}$)

Séquences (*instances*) $u_1 \succ v_1, \ldots, u_k \succ v_k$ ($k \geq 2$) vérifiant les règles de déduction :

$u_{j+1} = v_j$ pour tout $1 \leq j < k$ et $u_j \cap u_{j'} = v_j \cap v_{j'} = \varnothing$ pour tous $j \neq j'$

et impliquant une conclusion **unique** par application des propriétés respectives :

$$u_1 \succ v_k \text{ et } \bigcup_{j \in [\![1;k]\!]} u_j \succ \bigcup_{j \in [\![1;k]\!]} v_j$$

e.g.

Mécanismes de déduction (1/2)

Transitivité (k-$\mathsf{Tr}^{\succ}$) et Couverture (k-$\mathsf{Cov}^{\succ}$)

Séquences (*instances*) $u_1 \succ v_1, \ldots, u_k \succ v_k$ ($k \geq 2$) vérifiant les règles de déduction :

$u_{j+1} = v_j$ pour tout $1 \leq j < k$ et $u_j \cap u_{j'} = v_j \cap v_{j'} = \varnothing$ pour tous $j \neq j'$

et impliquant une conclusion **unique** par application des propriétés respectives :

$u_1 \succ v_k$ et $\bigcup_{j \in [\![1;k]\!]} u_j \succ \bigcup_{j \in [\![1;k]\!]} v_j$

e.g.

Instance $(\underbrace{🍝 \succ_\omega 🥗}_{(e_1)}, \underbrace{🥗 \succ_\omega 🧀\ 🍎}_{(r_3)})$ *de conclusion* $\underbrace{🍝 \succ_\omega 🧀\ 🍎}_{(e_3)}$ *et appartenant au mécanisme* $2\text{-}\mathsf{Tr}^{\succ_\omega}$.

Si

🍝 $\succ_\omega$ 🥗 et

🥗 $\succ_\omega$ 🧀 🍎

alors

🍝 $\succ_\omega$ 🧀 🍎

Mécanismes de déduction (1/2)

Transitivité (k-$\mathsf{Tr}^{\succ}$) et Couverture (k-$\mathsf{Cov}^{\succ}$)

Séquences (*instances*) $u_1 \succ v_1, \ldots, u_k \succ v_k$ $(k \geq 2)$ vérifiant les règles de déduction :

$u_{j+1} = v_j$ pour tout $1 \leq j < k$ et $u_j \cap u_{j'} = v_j \cap v_{j'} = \emptyset$ pour tous $j \neq j'$

et impliquant une conclusion **unique** par application des propriétés respectives :

$$u_1 \succ v_k \text{ et } \bigcup_{j \in [\![1;k]\!]} u_j \succ \bigcup_{j \in [\![1;k]\!]} v_j$$

e.g.

Instance ($\overbrace{\text{🍎} \succ_\omega \text{🧀}}^{(r_1)}$, $\overbrace{\text{🧀 🍝} \succ_\omega \text{🍎 🥗}}^{(r_4)}$) *de conclusion* $\overbrace{\text{🧀 🍎 🍝} \succ_\omega \text{🧀 🍎 🥗}}^{(e_2)}$ *et appartenant au mécanisme* 2-$\mathsf{Cov}^{\succ_\omega}$.

Si

🍎 $\succ_\omega$ 🧀 et

🧀 🍝 $\succ_\omega$ 🍎 🥗

alors

🧀 🍎 🍝 $\succ_\omega$ 🧀 🍎 🥗

Mécanismes de déduction (2/2)

Congruence (z-$\mathsf{Cg}^{\succ}$)

Instances $u \succ v$ dont l'ensemble des items spécifiques $u \backslash v \cup v \backslash u$ est disjoint de z et impliquant la conclusion **unique** $\tilde{u} \cup z \succ \tilde{v} \cup z$ par application de la propriété :

$$u \succ v \Longrightarrow \tilde{u} \cup z \succ \tilde{v} \cup z \quad \forall\, u,\, v,\, z \in 2^{[m]} \text{ où } \tilde{u} = u \backslash v \text{ et } \tilde{v} = v \backslash u$$

e.g.

Congruence (z-$\mathsf{Cg}^{\succ}$)

Instances $u \succ v$ dont l'ensemble des items spécifiques $u \backslash v \cup v \backslash u$ est disjoint de z et impliquant la conclusion **unique** $\tilde{u} \cup z \succ \tilde{v} \cup z$ par application de la propriété :

$$u \succ v \Longrightarrow \tilde{u} \cup z \succ \tilde{v} \cup z \quad \forall\, u,\, v,\, z \in 2^{[m]} \;\text{ où } \tilde{u} = u \backslash v \text{ et } \tilde{v} = v \backslash u$$

e.g.

Instance $\overbrace{\text{🧀 🍎 🍝} \succ_{\omega} \text{🧀 🍎 🥗}}^{(e_2)}$ *de conclusion* $\overbrace{\text{🍝} \succ_{\omega} \text{🥗}}^{(e_1)}$ *et appartenant au mécanisme* $\varnothing$-$\mathsf{Cg}^{\succ_\omega}$.

Si

$$\text{🧀 🍎 🍝} \quad \succ_{\omega} \quad \text{🧀 🍎 🥗}$$

alors

$$\text{🍝} \quad \succ_{\omega} \quad \text{🥗}$$

Schémas déductifs

Soient des comparaisons par paire de $\succ$ considérées comme **admises**.

... L'explication, une opération de déduction récursive.

Soient des comparaisons par paire de $\succ$ considérées comme **admises**.

... L'explication, une opération de déduction récursive.

Explication suivant le schéma déductif $tr/cg/cov$

$x \succ y$ s'explique suivant $tr/cg/cov$ si il existe une instance $(u_1 \succ v_1, \ldots, u_k \succ v_k)$ d'un mécanisme k-$\mathsf{Tr}^{\succ}$ dont la conclusion est $x \succ y$ et dont au moins une comparaison par paire $u_j \succ v_j$ s'explique suivant le schéma cg/cov ; les autres comparaisons étant **admises**.

Soient des comparaisons par paire de $\succ$ considérées comme **admises**.

... L'explication, une opération de déduction récursive.

Explication suivant le schéma déductif cg/cov

$x \succ y$ s'explique suivant cg/cov si il existe une instance $u \succ v$ d'un mécanisme z-$\mathsf{Cg}^{\succ}$ dont la conclusion est $x \succ y$ et telle que $u \succ v$ s'explique suivant le schéma cov.

Soient des comparaisons par paire de $\succ$ considérées comme **admises**.

... L'explication, une opération de déduction récursive.

***Explication suivant le schéma déductif** cov*

$x \succ y$ s'explique suivant *cov* si il existe une instance $(u_1 \succ v_1, \dots, u_k \succ v_k)$ d'un mécanisme k-$\mathsf{Cov}^{\succ}$ dont la conclusion est $x \succ y$ et telle que chaque comparaison par paire $u_j \succ v_j$ est **admise**.

Nos Arrangements de schémas

$tr/cg/cov$ $tr/cov/cg$ $cg/tr/cov$ $cg/cov/tr$ $cov/tr/cg$ $cov/cg/tr$

tr/cg tr/cov cg/tr cg/cov cov/tr cov/cg

tr cg cov

$\mathbf{Algo}_{tr/cg/cov}$ $\mathbf{Algo}_{tr/cov/cg}$ $\mathbf{Algo}_{cg/tr/cov}$ $\mathbf{Algo}_{cg/cov/tr}$ $\mathbf{Algo}_{cov/tr/cg}$ $\mathbf{Algo}_{cov/cg/tr}$

$\mathbf{Algo}_{tr/cg}$ $\mathbf{Algo}_{tr/cov}$ $\mathbf{Algo}_{cg/tr}$ $\mathbf{Algo}_{cg/cov}$ $\mathbf{Algo}_{cov/tr}$ $\mathbf{Algo}_{cov/cg}$

$\mathbf{Algo}_{tr}$ $\mathbf{Algo}_{cg}$ $\mathbf{Algo}_{cov}$

Des schémas divers et leurs algorithmes dédiés

$\mathbf{Algo}_{tr/cg/cov}$ $\mathbf{Algo}_{tr/cov/cg}$ $\mathbf{Algo}_{cg/tr/cov}$ $\mathbf{Algo}_{cg/cov/tr}$ $\mathbf{Algo}_{cov/tr/cg}$ $\mathbf{Algo}_{cov/cg/tr}$

$\mathbf{Algo}_{tr/cg}$ $\mathbf{Algo}_{tr/cov}$ $\mathbf{Algo}_{cg/tr}$ $\mathbf{Algo}_{cg/cov}$ $\mathbf{Algo}_{cov/tr}$ $\mathbf{Algo}_{cov/cg}$

$\mathbf{Algo}_{tr}$ $\mathbf{Algo}_{cg}$ $\mathbf{Algo}_{cov}$

3 familles d'algorithmes

$\mathcal{Tr}$ $\mathcal{Cg}$ $\mathcal{Cov}$

$\textbf{Algo}_{tr/cg/cov}$ $\textbf{Algo}_{tr/cov/cg}$ $\textbf{Algo}_{cg/tr/cov}$ $\textbf{Algo}_{cg/cov/tr}$ $\textbf{Algo}_{cov/tr/cg}$ $\textbf{Algo}_{cov/cg/tr}$

$\textbf{Algo}_{tr/cg}$ $\textbf{Algo}_{tr/cov}$ $\textbf{Algo}_{cg/tr}$ $\textbf{Algo}_{cg/cov}$ $\textbf{Algo}_{cov/tr}$ $\textbf{Algo}_{cov/cg}$

$\textbf{Algo}_{tr}$ $\textbf{Algo}_{cg}$ $\textbf{Algo}_{cov}$

Des similarités d'implémentation

3 familles d'algorithmes

$\mathcal{Tr}$	$\mathcal{Cg}$	$\mathcal{Cor}$
Recherche d'un chemin entre x et y dans un graphe	Énumération des comparaisons par paire congruentes à (x, y)	Résolution d'un PLNE

Des similarités d'implémentation

3 familles d'algorithmes

Tr

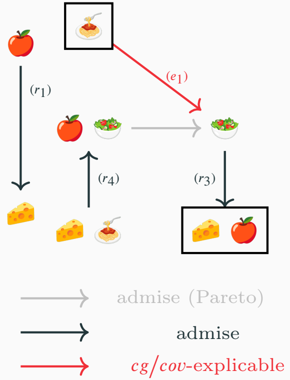
Recherche d'un chemin entre x et y dans un graphe

Cg

Énumération des comparaisons par paire congruentes à (x, y)

Cor

Résolution d'un PLNE



Des similarités d'implémentation

3 familles d'algorithmes

Tr

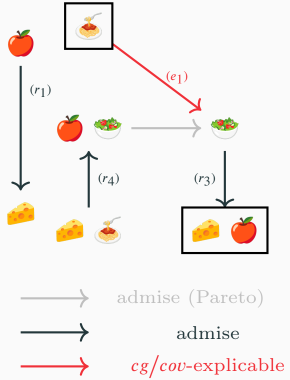
Recherche d'un chemin entre x et y dans un graphe

Cg

Énumération des comparaisons par paire congruentes à (x, y)

Cor

Résolution d'un PLNE



(e_1) 🍝 $\succ_\omega$ 🥗

🧀 🍝 $\succ_\omega$ 🧀 🥗

🍎 🍝 $\succ_\omega$ 🍎 🥗

(e_2) 🧀 🍎 🍝 $\succ_\omega$ 🧀 🍎 🥗

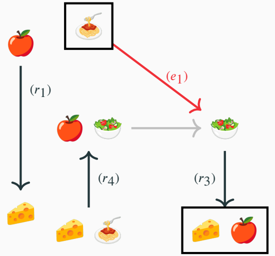
cov-explicable

Des similarités d'implémentation

3 familles d'algorithmes

$\mathcal{Tr}$

Recherche d'un chemin entre x et y dans un graphe



admise (Pareto)

admise

cg/cov-explicable

$\mathcal{Cg}$

Énumération des comparaisons par paire congruentes à (x, y)

(e_1) 🍝 $\succ_\omega$ 🥗

🧀 🍝 $\succ_\omega$ 🧀 🥗

🍎 🍝 $\succ_\omega$ 🍎 🥗

(e_2) 🧀 🍎 🍝 $\succ_\omega$ 🧀 🍎 🥗

cov-explicable

$\mathcal{Cor}$

Résolution d'un PLNE

Variables (booléennes) :
b_j pour tout $j \in [\![1;k]\!]$

Contraintes :

$$\sum_{j \in [\![1;k]\!]\,:\, i \in u_j} b_j = 0 \quad \text{pour tout } i \notin x \tag{3}$$

$$\sum_{j \in [\![1;k]\!]\,:\, i \in v_j} b_j = 0 \quad \text{pour tout } i \notin y \tag{4}$$

$$\sum_{j \in [\![1;k]\!]\,:\, i \in u_j} b_j \leq 1 \quad \text{pour tout } i \in x \tag{5}$$

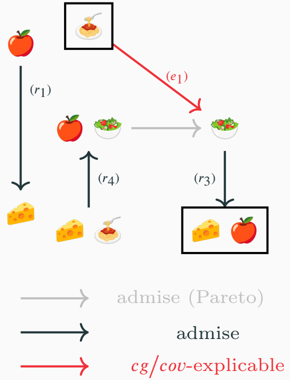
$$\sum_{j \in [\![1;k]\!]\,:\, i \in u_j} b_j = 1 \quad \text{pour tout } i \in y \tag{6}$$

Des similarités d'implémentation

3 familles d'algorithmes

Tr

Recherche d'un chemin entre x et y dans un graphe



Cg

Énumération des comparaisons par paire congruentes à (x, y)

$\boxed{(e_1)\ 🍝 \succ_\omega 🥗}$

🧀 🍝 $\succ_\omega$ 🧀 🥗

🍎 🍝 $\succ_\omega$ 🍎 🥗

(e_2) 🧀 🍎 🍝 $\succ_\omega$ 🧀 🍎 🥗

cov-explicable

Cor

Résolution d'un PLNE

Variables (booléennes) : b_j pour tout $j \in [\![1;k]\!]$

Contraintes :

$$\sum_{j \in [\![1;k]\!]\ :\ i \in u_j} b_j = 0 \quad \text{pour tout } i \notin x \tag{3}$$

$$\sum_{j \in [\![1;k]\!]\ :\ i \in v_j} b_j = 0 \quad \text{pour tout } i \notin y \tag{4}$$

$$\sum_{j \in [\![1;k]\!]\ :\ i \in u_j} b_j \leq 1 \quad \text{pour tout } i \in x \tag{5}$$

$$\sum_{j \in [\![1;k]\!]\ :\ i \in u_j} b_j = 1 \quad \text{pour tout } i \in y \tag{6}$$

$b_{(r_1)}$ 🍎 $\succ_\omega$ 🧀 $= 1$

$b_{(r_4)}$ 🧀 🍝 $\succ_\omega$ 🍎 🥗 $= 1$

$b_{(r_3)}$ 🥗 $\succ_\omega$ 🧀 🍎 $= 0$

$b_{(r_2)}$ 🧀 🥗 $\succ_\omega$ 🍝 $= 0$

Représentation de l'explication

$\omega = ($🧀 $: 3,$ 🍎 $: 4,$ 🥗 $: 8,$ 🍝 $: 10)$

$\succ_\omega$

$$\left\{ \begin{array}{llcl} (r_1) & 🍎 & \succ_\omega & 🧀 \\ (r_2) & 🧀\,🥗 & \succ_\omega & 🍝 \\ (r_3) & 🥗 & \succ_\omega & 🧀\,🍎 \\ (r_4) & 🧀\,🍝 & \succ_\omega & 🍎\,🥗 \end{array} \right\}$$

$tr/cg/cov$

$\omega = ($🧀 $: 3$, 🍎 $: 4$, 🥗 $: 8$, 🍝 $: 10)$

$\succ_\omega$

(r_1) 🍎 $\succ_\omega$ 🧀
(r_2) 🧀 🥗 $\succ_\omega$ 🍝
(r_3) 🥗 $\succ_\omega$ 🧀 🍎
(r_4) 🧀 🍝 $\succ_\omega$ 🍎 🥗

tr/cg/cov

(r_4): 🧀 🍝 $\succ_\omega$ 🍎 🥗

(r_1): 🍎 $\succ_\omega$ 🧀

(r_2): 🧀 🥗 $\succ_\omega$ 🍝

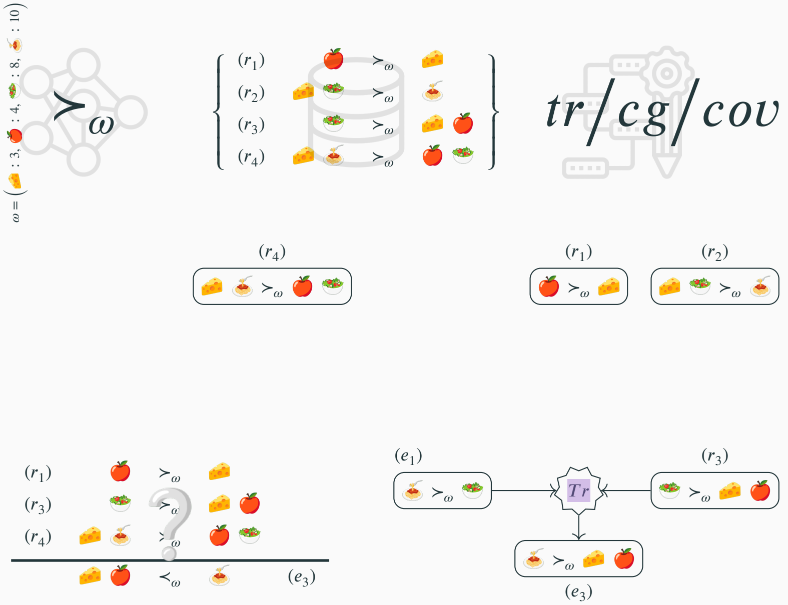
(r_1) 🍎 $\succ_\omega$ 🧀
(r_3) 🥗 $\succ_\omega$ 🧀 🍎
(r_4) 🧀 🍝 $\succ_\omega$ 🍎 🥗

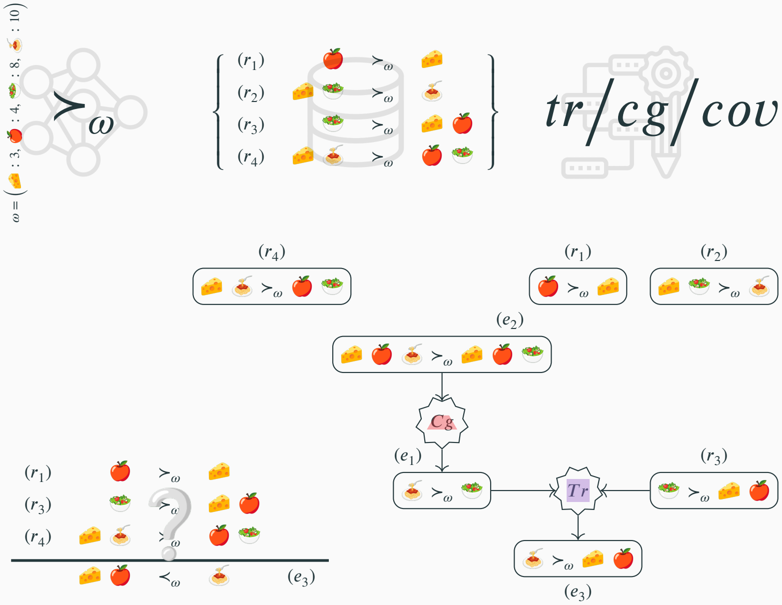
🧀 🍎 $\prec_\omega$ 🍝 (e_3)

(r_3): 🥗 $\succ_\omega$ 🧀 🍎

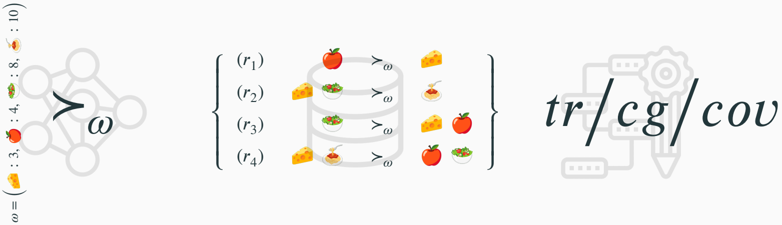
🍝 $\succ_\omega$ 🧀 🍎 (e_3)

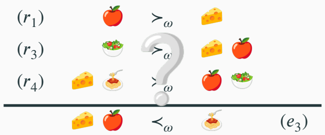
Représentation de l'explication

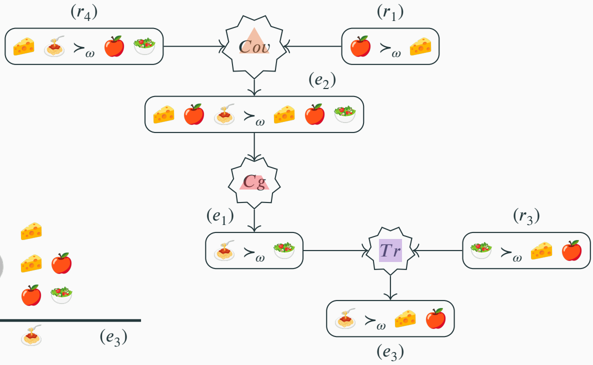



ω = (🧀 : 3, 🍎 : 4, 🥗 : 8, 🍝 : 10)
≻ω
(r1) 🍎 ≻ω 🧀
(r2) 🧀 🥗 ≻ω 🍝
(r3) 🥗 ≻ω 🧀 🍎
(r4) 🧀 🍝 ≻ω 🍎 🥗
tr/cg/cov
(r4) 🧀 🍝 ≻ω 🍎 🥗
(r1) 🍎 ≻ω 🧀
(r2) 🧀 🥗 ≻ω 🍝
(e2) 🧀 🍎 🍝 ≻ω 🧀 🍎 🥗
Cg
(e1) 🍝 ≻ω 🥗
Tr
(r3) 🥗 ≻ω 🧀 🍎
🍝 ≻ω 🧀 🍎
(e3)
(r1) 🍎 ≻ω 🧀
(r3) 🥗 ≻ω 🧀 🍎
(r4) 🧀 🍝 ≻ω 🍎 🥗
🧀 🍎 ≺ω 🍝 (e3)

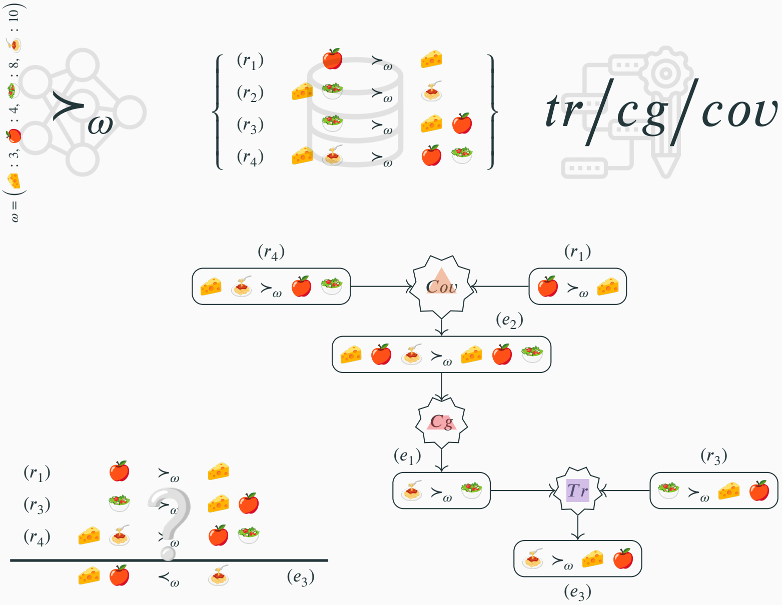
Représentation de l'explication



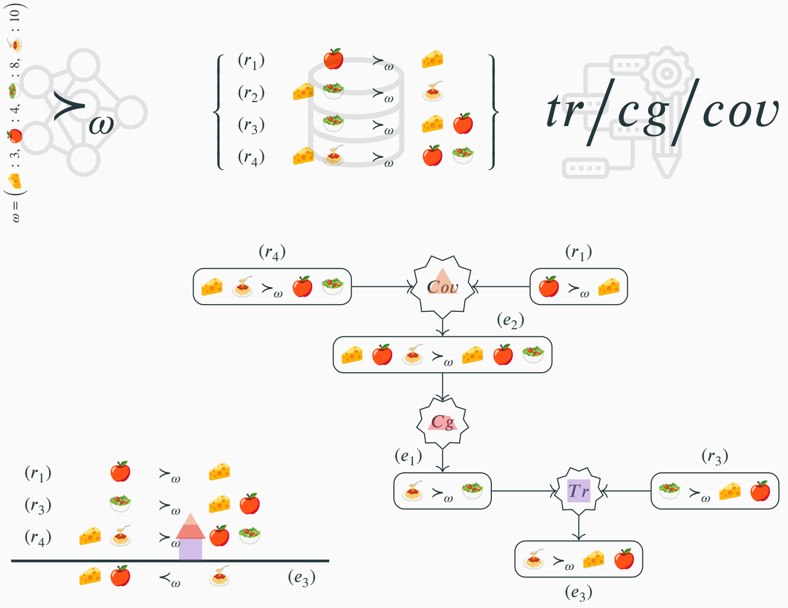




Représentation de l'explication



Représentation de l'explication



L'**Axiome 3.** et les schémas déductifs

Axiome 3.

$tr/cg/cov$ $\quad$ $tr/cov/cg$ $\quad$ $cg/tr/cov$ $\quad$ $cg/cov/tr$ $\quad$ $cov/tr/cg$ $\quad$ $cov/cg/tr$

tr/cg $\quad$ tr/cov $\quad$ cg/tr $\quad$ cg/cov $\quad$ cov/tr $\quad$ cov/cg

tr $\quad$ cg $\quad$ cov

L'**Axiome 3.** et les schémas déductifs

Axiome 3.

$tr/cg/cov$ $tr/cov/cg$ $cg/tr/cov$ $cg/cov/tr$ $cov/tr/cg$ $cov/cg/tr$

tr/cg tr/cov cg/tr cg/cov cov/tr cov/cg

tr cg cov

…ensemble non exhaustif !

La chasse aux schémas déductifs

$\omega = ($🧀 $: 3,$ 🍎 $: 4,$ 🥗 $: 8,$ 🍝 $: 10)$

$\succ_\omega$

(r_1)	🍎	$\succ_\omega$	🧀	
(r_2)	🧀 🥗	$\succ_\omega$	🍝	
(r_3)	🥗	$\succ_\omega$	🧀 🍎	
(r_4)	🧀 🍝	$\succ_\omega$	🍎 🥗	

$tr/cg/cov$

La chasse aux schémas déductifs

$\omega =$ (🧀 : 3, 🍎 : 4, 🥗 : 8, 🍝 : 10)

$\succ_\omega$

(r_1)	🍎	$\succ_\omega$	🧀
(r_2)			
(r_3)	🥗	$\succ_\omega$	🧀 🍎
(r_4)	🧀 🍝	$\succ_\omega$	🍎 🥗

$tr/cg/cov$

La chasse aux schémas déductifs

$\omega' = ($🧀 $: 3,$ 🍎 $: 4,$ 🥗 $: 8,$ 🍝 $: 10,$ 🍾 $: 23)$

$\succ_{\omega'}$

(r_1)	🍎	$\succ_{\omega'}$	🧀
(r_2)	🍾	$\succ_{\omega'}$	🍎 🥗 🍝
(r_3)	🥗	$\succ_{\omega'}$	🧀 🍎
(r_4)	🧀 🍝	$\succ_{\omega'}$	🍎 🥗

tr

cg/cov

cov

La chasse aux schémas déductifs

$\omega' = ($🧀 $: 3,$ 🍎 $: 4,$ 🥗 $: 8,$ 🍝 $: 10,$ 🍾 $: 23)$

$\succ_{\omega'}$

(r_1)		🍎	$\succ_{\omega'}$	🧀
(r_2)		🍾	$\succ_{\omega'}$	🍎 🥗 🍝
(r_3)		🥗	$\succ_{\omega'}$	🧀 🍎
(r_4)	🧀	🍝	$\succ_{\omega'}$	🍎 🥗

tr

cg/cov

cov

À expliquer :

(e_1)		🍝	$\succ_{\omega'}$	🥗
(e_4)		🍾	$\succ_{\omega'}$	🧀 🍎
(e_5)	🍝	🍾	$\succ_{\omega'}$	🧀 🍎 🥗

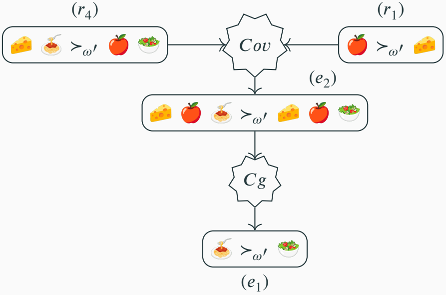
La chasse aux schémas déductifs

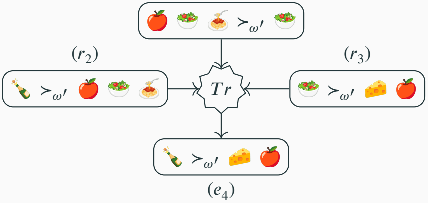
$\omega' = ($🧀 $: 3,$ 🍎 $: 4,$ 🥗 $: 8,$ 🍝 $: 10,$ 🍾 $: 23)$

$\succ_{\omega'}$

(r_1) 🍎 $\succ_{\omega'}$ 🧀
(r_2) 🍾 $\succ_{\omega'}$ 🍎 🥗 🍝
(r_3) 🥗 $\succ_{\omega'}$ 🧀 🍎
(r_4) 🧀 🍝 $\succ_{\omega'}$ 🍎 🥗

tr
cg/cov
cov





(e_5) 🍝 🍾 $\succ_{\omega'}$ 🧀 🍎 🥗 non explicable !

$\omega' = ($🧀 $: 3$, 🍎 $: 4$, 🥗 $: 8$, 🍝 $: 10$, 🍾 $: 23)$

$\succ_{\omega'}$

(r_1)		🍎	$\succ_{\omega'}$	🧀
(r_2)		🍾	$\succ_{\omega'}$	🍎 🥗 🍝
(r_3)		🥗	$\succ_{\omega'}$	🧀 🍎
(r_4)	🧀	🍝	$\succ_{\omega'}$	🍎 🥗
(e_1)		🍝	$\succ_{\omega'}$	🥗
(e_4)		🍾	$\succ_{\omega'}$	🧀 🍎

tr

cg/*cov*

cov

À expliquer :

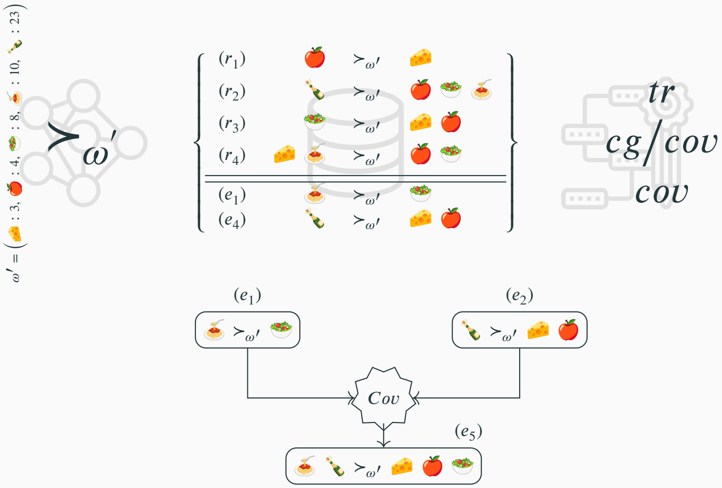
(e_5) 🍝 🍾 $\succ_{\omega'}$ 🧀 🍎 🥗

Évolution dynamique du contexte 🔫

💡 Enrichir la base de référence.

*Une comparaison par paire expliquée est **admise**.*

La chasse aux schémas déductifs



Évolution dynamique du contexte

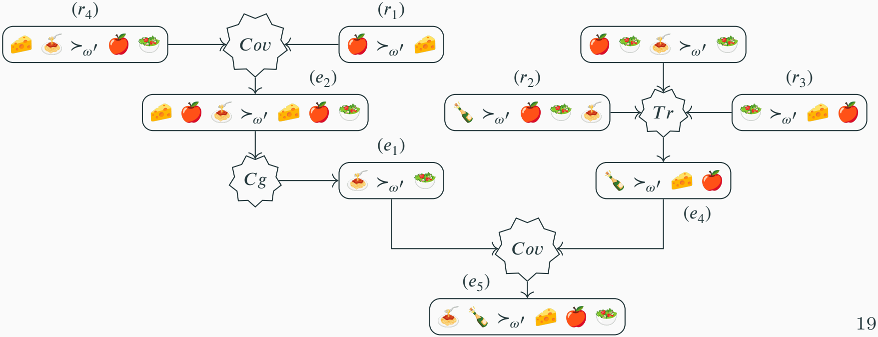
La chasse aux schémas déductifs

$\omega' = ($🧀 $: 3,$ 🍎 $: 4,$ 🥗 $: 8,$ 🍝 $: 10,$ 🍾 $: 23)$

$\succ_{\omega'}$

(r_1)	🍎	$\succ_{\omega'}$	🧀
(r_2)	🍾	$\succ_{\omega'}$	🍎 🥗 🍝
(r_3)	🥗	$\succ_{\omega'}$	🧀 🍎
(r_4)	🧀 🍝	$\succ_{\omega'}$	🍎 🥗

$cov / tr \cdot cg / cov$



Évolution dynamique & Expérimentations exhaustives

- Découvrir de nouveaux schémas déductifs : $cg/tr/cg$, $cov\Big/tr \cdot cg/cov$...
- "Structure" dépendante des *contextes* considérés.

Évaluer le **pouvoir explicatif** des schémas

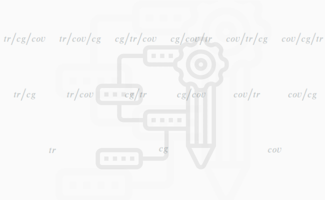
mais aussi et SURTOUT

le **pouvoir déductif** des

RAISONNEMENTS INTUITIFS

sur lesquels ils reposent.

Protocole expérimental



+ évolution dynamique

$\mathbb{CR}_{\succ}$ [1] : Comparaisons par paire disjointes adjacentes caractérisant $\succ$

m	$\lvert\mathscr{R}_m\rvert$ / $m!$	$\lvert\mathbb{T}_m\rvert$	$\lvert\mathbb{CR}_{\succ}\rvert$
4	14	25	$[\![3;6]\!]$
5	516	90	$[\![4;12]\!]$
6	124 187	301	$[\![5;21]\!]$
7	214 580 603	966	–
8	– [2]	3025	–

$\mathscr{R}_m$: ensemble des relations d'ordre linéaire additives $\succ$ définies sur $2^{[m]}$
$\mathbb{T}_m$: ensemble des comparaisons d'ensembles non vides d'items disjoints

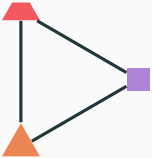
1. [Fishburn et al., 2002]
2. inconnue.

Pouvoir explicatif des propriétés/raisonnements intuitifs

Lorsque $m = 4, 5, 6$ et

$$\mathbb{CR}_{\succ}$$

alors

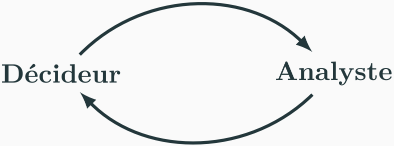


$$\Longrightarrow \succ$$

(Toute comparaison par paire est explicable)

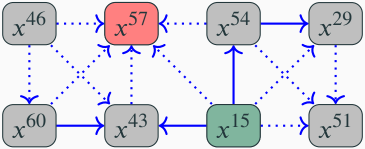
Application aux problèmes de choix sur espace binaire de critères

Sommaire



Recommandation

Preference swap - $\mathbb{PI}$ - *Conclusion robuste* - *Relation nécessaire*



Cadre de décision

Choix des **meilleures**

🥇 🥈 🥉

alternatives parmi

un ensemble **fini** $\mathbb{A}$

d'alternatives décrites sur

m critères **binaires**

et où les préférences sont

additives.

$\omega : \langle \omega_i \rangle_{i \in [m]}$ with $\omega_i : \{0, 1\} \to \mathbb{R}^+$

(a) Personnalisable : "oui" (1) ou "non" (0)

(b) Produit en FR : "oui" (1) ou "non" (0)

(c) Livraison : "-14jrs" (1) ou "+15jrs" (0)

(d) Qualité : "haute" (1) ou "acceptable" (0)

(e) Prix : "abordable" (1) ou "cher" (0)

(f) Bonne réputation : "oui" (1) ou "non" (0)

	a	b	c	d	e	f
x^{51}	1	1	0	0	1	1
x^{46}	1	0	1	1	1	0
x^{30}	0	1	1	1	1	0
x^{57}	1	1	1	0	0	1
x^{60}	1	1	1	1	0	0
x^{43}	1	0	1	0	1	1
x^{15}	0	0	1	1	1	1
x^{54}	1	1	0	1	1	0
x^{29}	0	1	1	1	0	1

Modèle additif de préférences

Les critères (binaires)

(a) Personnalisable : "oui" (1) ou "non" (0)

(b) Produit en FR : "oui" (1) ou "non" (0)

(c) Livraison : "-14jrs" (1) ou "+15jrs" (0)

(d) Qualité : "haute" (1) ou "acceptable" (0)

(e) Prix : "abordable" (1) ou "cher" (0)

(f) Bonne réputation : "oui" (1) ou "non" (0)

La table de performance

	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf

Un modèle de préférences

$$x^{15} \succsim_\omega x^{43} \iff \omega(x^{15}) \geq \omega(x^{43})$$

avec : $$\begin{aligned} \omega(x^{15}) &= \omega_c(1) + \omega_d(1) + \omega_e(1) + \omega_f(1) \\ \omega(x^{43}) &= \omega_a(1) + \omega_c(1) + \omega_e(1) + \omega_f(1) \end{aligned}$$

$$\omega_i(0) = 0 \text{ et } \omega_i(1) = \omega_i \quad \text{pour tout } i \in [m]$$

Relation induite par ω et Preference swap

$\succsim_\omega$: la relation induite par ω sur $\mathbf{X} = \prod_{\mathtt{i} \in [m]} X_{\mathtt{i}}$ où $X_{\mathtt{i}} = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$

$$x^{15} \succsim_\omega x^{43} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_{\mathsf{c}} + \omega_{\mathsf{d}} + \omega_{\mathsf{e}} + \omega_{\mathsf{f}} \geq \omega_{\mathsf{a}} + \omega_{\mathsf{c}} + \omega_{\mathsf{e}} + \omega_{\mathsf{f}}$$

Relation induite par ω et Preference swap

$\succsim_\omega$: la relation induite par ω sur $\mathbf{X} = \prod_{\mathtt{i} \in [m]} X_{\mathtt{i}}$ où $X_{\mathtt{i}} = \{0, 1\}$

$$x^{15} \succsim_\omega x^{43} \iff \cancel{\omega_{\mathtt{c}}} + \omega_{\mathtt{d}} + \cancel{\omega_{\mathtt{e}}} + \cancel{\omega_{\mathtt{f}}} \geq \omega_{\mathtt{a}} + \cancel{\omega_{\mathtt{c}}} + \cancel{\omega_{\mathtt{e}}} + \cancel{\omega_{\mathtt{f}}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\omega_{\mathtt{d}} \geq \omega_{\mathtt{a}}$$

Relation induite par ω et Preference swap

$\succsim_\omega$: la relation induite par ω sur $\mathbf{X} = \prod_{\mathtt{i} \in [m]} X_\mathtt{i}$ où $X_\mathtt{i} = \{0, 1\}$

$$x^{15} \succsim_\omega x^{43} \quad \Longleftrightarrow \quad \cancel{\omega_\mathsf{c}} + \omega_\mathsf{d} + \cancel{\omega_\mathsf{e}} + \cancel{\omega_\mathsf{f}} \geq \omega_\mathsf{a} + \cancel{\omega_\mathsf{c}} + \cancel{\omega_\mathsf{e}} + \cancel{\omega_\mathsf{f}}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x^4 \succsim_\omega x^{32} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_\mathsf{d} \geq \omega_\mathsf{a}$$

x^4 et x^{32} : des alternatives singletons.

(x^4, x^{32}) est un ***preference swap***.

Relation induite par ω et Preference swap

$\succsim_\omega$: la relation induite par ω sur $\mathbf{X} = \prod_{\mathtt{i} \in [m]} X_{\mathtt{i}}$ où $X_{\mathtt{i}} = \{0, 1\}$

$$x^{15} \succsim_\omega x^{43} \iff \cancel{\omega_{\mathtt{c}}} + \omega_{\mathtt{d}} + \cancel{\omega_{\mathtt{e}}} + \cancel{\omega_{\mathtt{f}}} \geq \omega_{\mathtt{a}} + \cancel{\omega_{\mathtt{c}}} + \cancel{\omega_{\mathtt{e}}} + \cancel{\omega_{\mathtt{f}}}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x^{4} \succsim_\omega x^{32} \iff \omega_{\mathtt{d}} \geq \omega_{\mathtt{a}}$$

x^4 et x^{32} : des alternatives singletons.

(x^4, x^{32}) est un ***preference swap***.

- $|\mathbb{S}_{\succsim_\omega}| \in \Theta(m^2)$
- Intelligible, simple (cognitivement)

Relation induite par ω et Preference swap

$\succsim_\omega$: la relation induite par ω sur $\mathbf{X} = \prod_{\mathtt{i} \in [m]} X_{\mathtt{i}}$ où $X_{\mathtt{i}} = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$

$$x^{15} \succsim_\omega x^{43} \iff \cancel{\omega_{\mathsf{c}}} + \omega_{\mathsf{d}} + \cancel{\omega_{\mathsf{e}}} + \cancel{\omega_{\mathsf{f}}} \geq \omega_{\mathsf{a}} + \cancel{\omega_{\mathsf{c}}} + \cancel{\omega_{\mathsf{e}}} + \cancel{\omega_{\mathsf{f}}}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x^{4} \succsim_\omega x^{32} \iff \omega_{\mathsf{d}} \geq \omega_{\mathsf{a}}$$

x^4 et x^{32} : des alternatives singletons.

(x^4, x^{32}) est un ***preference swap***.

- $|\mathbb{S}_{\succsim_\omega}| \in \Theta(m^2)$
- Intelligible, simple (cognitivement)

💡 Servir de comparaison par paire **admise** 🛢

pour expliquer ?

Relation induite par ω et Preference swap

$\succsim_\omega$: la relation induite par ω sur $\mathbf{X} = \prod_{\mathtt{i} \in [m]} X_{\mathtt{i}}$ où $X_{\mathtt{i}} = \{0, 1\}$

$$x^{15} \succsim_\omega x^{43} \iff \cancel{\omega_{\mathsf{c}}} + \omega_{\mathsf{d}} + \cancel{\omega_{\mathsf{e}}} + \cancel{\omega_{\mathsf{f}}} \geq \omega_{\mathsf{a}} + \cancel{\omega_{\mathsf{c}}} + \cancel{\omega_{\mathsf{e}}} + \cancel{\omega_{\mathsf{f}}}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x^{4} \succsim_\omega x^{32} \iff \omega_{\mathsf{d}} \geq \omega_{\mathsf{a}}$$

x^4 et x^{32} : des alternatives singletons.

(x^4, x^{32}) est un ***preference swap***.

- $|\mathbb{S}_{\succsim_\omega}| \in \Theta(m^2)$
- Intelligible, simple (cognitivement)

💡 Servir de comparaison par paire **admise**

[Belahcène et al., 2017] : « la relation nécessaire ! »

Sommaire

Définitions

$\mathbb{P}\mathbb{I}$: des préférences exprimées.

Fonctions de score compatibles avec $\mathbb{P}\mathbb{I}$

Ensemble $\Omega_{\mathbb{P}\mathbb{I}}$ des fonctions $\omega : \langle \omega_i \rangle_{i \in [m]}$ telles que $\omega(x) \geq \omega(y)\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{P}\mathbb{I}$.

Relation nécessaire étant donnée $\mathbb{P}\mathbb{I}$ [Greco et al., 2008]

Ensemble des (x, y) telle que $\omega(x) \geq \omega(y)$ pour toute $\omega \in \Omega_{\mathbb{P}\mathbb{I}}$.

On dit que x est nécessairement préférée à y.

Relation nécessaire et problème de choix ?

Simplifie le problème de décision (conclusions robustes)

$\mathbb{P}\mathbb{I}$: des préférences exprimées.

Fonctions de score compatibles avec $\mathbb{P}\mathbb{I}$

Ensemble $\Omega_{\mathbb{P}\mathbb{I}}$ des fonctions $\omega : \langle \omega_{\mathtt{i}} \rangle_{\mathtt{i} \in [m]}$ telles que $\omega(x) \geq \omega(y)\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{P}\mathbb{I}$.

Relation nécessaire étant donnée $\mathbb{P}\mathbb{I}$ [Greco et al., 2008]

Ensemble des (x, y) telle que $\omega(x) \geq \omega(y)$ pour toute $\omega \in \Omega_{\mathbb{P}\mathbb{I}}$.
On dit que x est nécessairement préférée à y.

Relation nécessaire et problème de choix ?

Simplifie le problème de décision (conclusions robustes)

Définitions

$\mathbb{PI}$: des préférences exprimées.

Fonctions de score compatibles avec $\mathbb{PI}$

Ensemble $\Omega_{\mathbb{PI}}$ des fonctions $\omega : \langle \omega_{\mathrm{i}} \rangle_{\mathrm{i} \in [m]}$ telles que $\omega(x) \geq \omega(y)\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{PI}$.

Relation nécessaire étant donnée $\mathbb{PI}$ [Greco et al., 2008]

Ensemble des (x, y) telle que $\omega(x) \geq \omega(y)$ pour toute $\omega \in \Omega_{\mathbb{PI}}$.
On dit que x est nécessairement préférée à y.

Relation nécessaire et problème de choix ?

Simplifie le problème de décision (conclusions robustes)

$\mathbb{P}\mathbb{I}$: des préférences exprimées.

Fonctions de score compatibles avec $\mathbb{P}\mathbb{I}$

Ensemble $\Omega_{\mathbb{P}\mathbb{I}}$ des fonctions $\omega : \langle \omega_{\mathtt{i}} \rangle_{\mathtt{i} \in [m]}$ telles que $\omega(x) \geq \omega(y)\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{P}\mathbb{I}$.

Relation nécessaire étant donnée $\mathbb{P}\mathbb{I}$ [Greco et al., 2008]

Ensemble des (x, y) telle que $\omega(x) \geq \omega(y)$ pour toute $\omega \in \Omega_{\mathbb{P}\mathbb{I}}$.
On dit que x est nécessairement préférée à y.

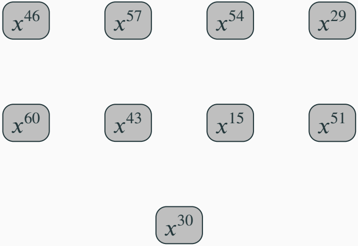
Relation nécessaire et problème de choix ?

Simplifie le problème de décision (conclusions robustes)

Relation nécessaire et conclusions robustes

Problème de décision : Choix des 4 meilleurs fournisseurs parmi 9.

	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf

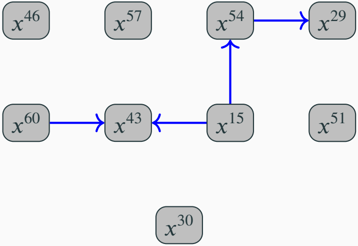


Relation nécessaire et conclusions robustes

Problème de décision : Choix des 4 meilleurs fournisseurs parmi 9.

Le décideur fournit : $\mathbb{PI} = \{(x^{15}, x^{43}), (x^{60}, x^{43}), (x^{15}, x^{54}), (x^{54}, x^{29})\}$

	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf

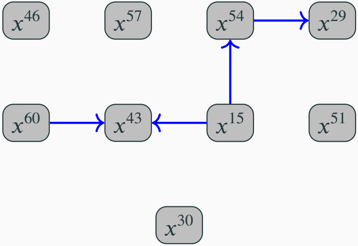


Relation nécessaire et conclusions robustes

Problème de décision : Choix des 4 meilleurs fournisseurs parmi 9.

Le décideur fournit : $\mathbb{PI} = \{(x^{15}, x^{43}), (x^{60}, x^{43}), (x^{15}, x^{54}), (x^{54}, x^{29})\}$

	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf



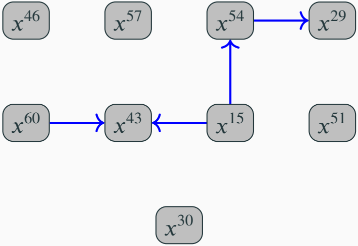
L'analyste calcule $\mathbb{N}^{\mathbf{A}}_{\mathbb{PI}} = \mathbb{N}_{\mathbb{PI}} \cap \mathbf{A} \times \mathbf{A}$

Relation nécessaire et conclusions robustes

Problème de décision : Choix des 4 meilleurs fournisseurs parmi 9.

Le décideur fournit : $\mathbb{PI} = \{(x^{15}, x^{43}), (x^{60}, x^{43}), (x^{15}, x^{54}), (x^{54}, x^{29})\}$

	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf



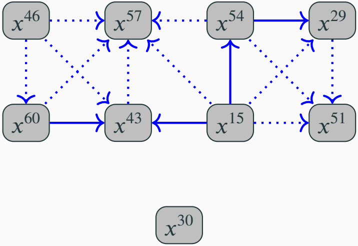
L'analyste calcule $\mathbb{N}^{\mathbf{A}}_{\mathbb{PI}} = \mathbb{N}_{\mathbb{PI}} \cap \mathbf{A} \times \mathbf{A}$

Relation nécessaire et conclusions robustes

Problème de décision : Choix des 4 meilleurs fournisseurs parmi 9.

Le décideur fournit : $\mathbb{P}\mathbb{I} = \{(x^{15}, x^{43}), (x^{60}, x^{43}), (x^{15}, x^{54}), (x^{54}, x^{29})\}$

	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf



L'analyste calcule $\mathbb{N}_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^{\mathbf{A}} = \mathbb{N}_{\mathbb{P}\mathbb{I}} \cap \mathbf{A} \times \mathbf{A}$

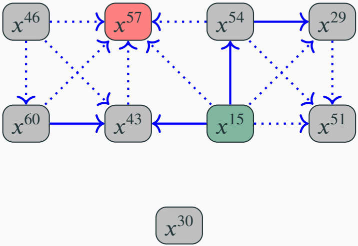
Relation nécessaire et conclusions robustes

Problème de décision : Choix des 4 meilleurs fournisseurs parmi 9.

Le décideur fournit : $\mathbb{P}\mathbb{I} = \{(x^{15}, x^{43}), (x^{60}, x^{43}), (x^{15}, x^{54}), (x^{54}, x^{29})\}$

	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf

A



L'analyste calcule $\mathbb{N}_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^{\mathbf{A}} = \mathbb{N}_{\mathbb{P}\mathbb{I}} \cap \mathbf{A} \times \mathbf{A}$

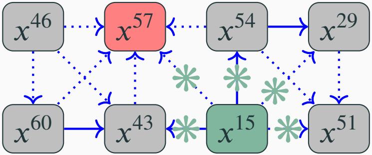
Deux conclusions robustes :

- Choix nécessaire : $d^+(x^{15}) \geq 5$
- Choix impossible : $d^-(x^{57}) \geq 4$

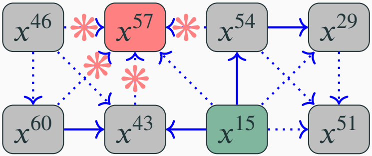
Simplification : Choix de 3 meilleurs fournisseurs parmi 7.

C'est expliquer la relation nécessaire.

Expliquer x^{15}



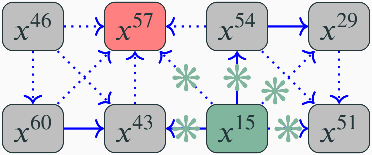
Expliquer x^{57}



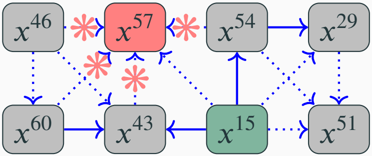
Comment expliquer ?

C'est expliquer la relation nécessaire.

Expliquer x^{15}



Expliquer x^{57}



Comment expliquer ?

[Belahcène et al., 2017] : à l'aide de **preference swaps nécessaires**.

$$\mathbb{S}_{\mathbb{N}_{\mathbb{P}\mathbb{I}}} = \bigcap_{\omega \in \Omega_{\mathbb{P}\mathbb{I}}} \mathbb{S}_{\succsim_\omega}$$

	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf

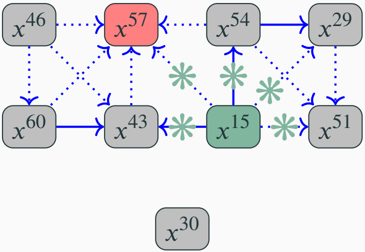
$\mathbb{S}_{\mathbb{N}_{\mathbb{P}\mathbb{I}}} = \{(\text{d, a}), (\text{e, b}), (\text{d, f})\}$

[Belahcène et al., 2017] : à l'aide de **preference swaps nécessaires**.

$$\mathbb{S}_{\mathbb{N}_{\mathbb{P}\mathbb{I}}} = \bigcap_{\omega \in \Omega_{\mathbb{P}\mathbb{I}}} \mathbb{S}_{\succsim_\omega}$$

	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf

$\mathbb{S}_{\mathbb{N}_{\mathbb{P}\mathbb{I}}} = \{(\mathrm{d}, \mathrm{a}), (\mathrm{e}, \mathrm{b}), (\mathrm{d}, \mathrm{f})\}$



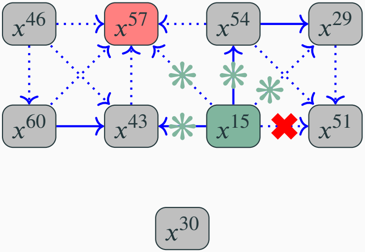
[Belahcène et al., 2017] : à l'aide de **preference swaps nécessaires**.

$\mathbb{N}_{\mathbb{PI}}$ $\mathbb{S}_{\mathbb{N}_{\mathbb{PI}}}$ cov cg

$$\mathbb{S}_{\mathbb{N}_{\mathbb{PI}}} = \bigcap_{\omega \in \Omega_{\mathbb{PI}}} \mathbb{S}_{\succsim_\omega}$$

	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf

$\mathbb{S}_{\mathbb{N}_{\mathbb{PI}}} = \{\underline{(d, a)}, (e, b), (d, f)\}$

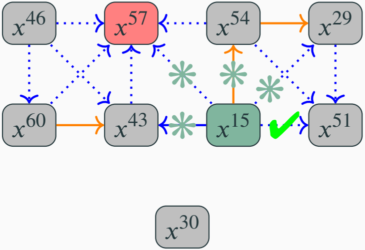


$(x^{15}, x^{51}) \in \mathbb{N}_{\mathbb{PI}}$ n'est pas explicable dans le *contexte* $(\mathbb{N}_{\mathbb{PI}}, \mathbb{S}_{\mathbb{N}_{\mathbb{PI}}}, cov)$!

Explication de $\mathbb{N}_{\mathbb{PI}}$ dans la littérature

[Kadzinski et al., 2014] : à l'aide de **preferential reducts**.

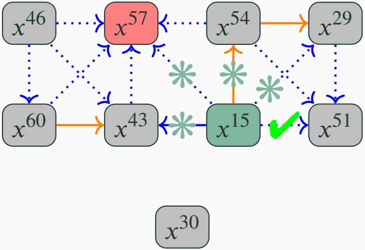
	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf



$$(x^{15}, x^{51}) \in \mathbb{N}_{\mathbb{PI}} \text{ car : } \begin{array}{l} (x^{60}, x^{43}) \in \mathbb{PI} \\ (x^{54}, x^{29}) \in \mathbb{PI} \\ (x^{15}, x^{54}) \in \mathbb{PI} \end{array}$$

[Kadzinski et al., 2014] : à l'aide de **preferential reducts**.

	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf



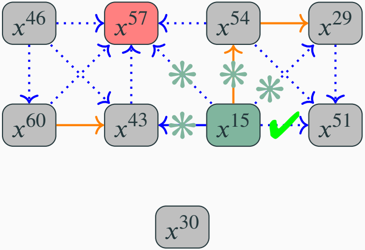
$$(x^{15}, x^{51}) \in \mathbb{N}_{\mathbb{PI}} \text{ car : } \begin{array}{l} (x^{60}, x^{43}) \in \mathbb{PI} \\ (x^{54}, x^{29}) \in \mathbb{PI} \\ (x^{15}, x^{54}) \in \mathbb{PI} \end{array}$$

👍 Complète (toute déduction admet une explication).

Explication de $\mathbb{N}_{\mathbb{P}\mathbb{I}}$ dans la littérature

[Kadzinski et al., 2014] : à l'aide de **preferential reducts**.

	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf



$(x^{15}, x^{51}) \in \mathbb{N}_{\mathbb{P}\mathbb{I}}$ car : $(x^{60}, x^{43}) \in \mathbb{P}\mathbb{I}$

$(x^{54}, x^{29}) \in \mathbb{P}\mathbb{I}$

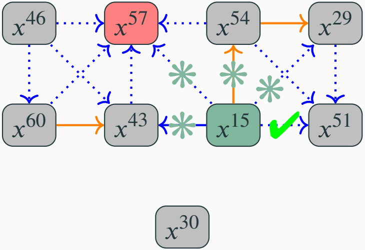
$(x^{15}, x^{54}) \in \mathbb{P}\mathbb{I}$

- 👍 Complète (toute déduction admet une explication).
- 👎 N'explicite pas les mécanismes en jeu.

Explication de $\mathbb{N}_{\mathbb{PI}}$ dans la littérature

[Kadzinski et al., 2014] : à l'aide de **preferential reducts**.

	a	b	c	d	e	f	
x^{51}	1	1	0	0	1	1	abef
x^{46}	1	0	1	1	1	0	acde
x^{30}	0	1	1	1	1	0	bcde
x^{57}	1	1	1	0	0	1	abcf
x^{60}	1	1	1	1	0	0	abcd
x^{43}	1	0	1	0	1	1	acef
x^{15}	0	0	1	1	1	1	cdef
x^{54}	1	1	0	1	1	0	abde
x^{29}	0	1	1	1	0	1	bcdf



$$(x^{15}, x^{51}) \in \mathbb{N}_{\mathbb{PI}} \text{ car : } \begin{array}{l} (x^{60}, x^{43}) \in \mathbb{PI} \\ (x^{54}, x^{29}) \in \mathbb{PI} \\ (x^{15}, x^{54}) \in \mathbb{PI} \end{array}$$

👍 Complète (toute déduction admet une explication).

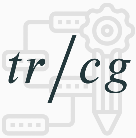
👎 N'explicite pas les mécanismes en jeu.

💡 $\mathbb{PI}$ comme paires **admises**

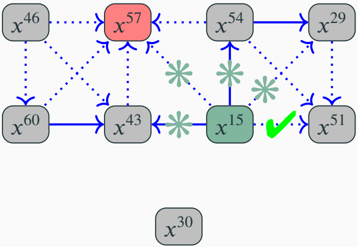
Explication de $(x, y) \in \mathbb{N}_{\mathbb{PI}}$

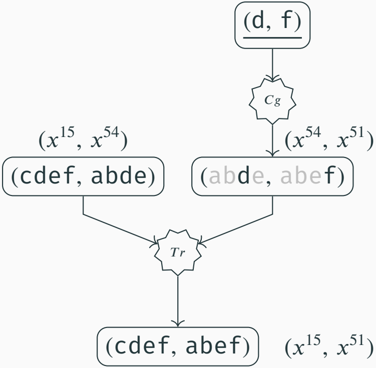
Travaux	Contexte implicite	Contexte explicite	Relation binaire	Base de référence	Schémas déductifs
[Kadzinski et al., 2014]	Non	Non	–	–	–
[Belahcène et al., 2017]	Oui	Non	$\mathbb{N}_{\mathbb{PI}}$	$\mathbb{S}_{\mathbb{N}_{\mathbb{PI}}}$	cg, cov
La thèse	Non	Oui	$\mathbb{N}_{\mathbb{PI}}$	$\mathbb{S}_{\mathbb{N}_{\mathbb{PI}}}$ + $\mathbb{PI}$	cg/tr tr/cg, $cg/tr/cg$ ...

Explication de la relation nécessaire dans la thèse



$\mathbb{S}_{\mathbb{N}_{\mathbb{PI}}} = \{(\mathsf{d},\ \mathsf{a}), (\mathsf{e},\ \mathsf{b}), \underline{(\mathsf{d},\ \mathsf{f})}\}$





Sommaire

Mesure expérimentale du gain d'expressivité

Problème de décision : 3-best.

Instance : $(m, \mathbf{A}, \mathbf{A}^R, \omega)$

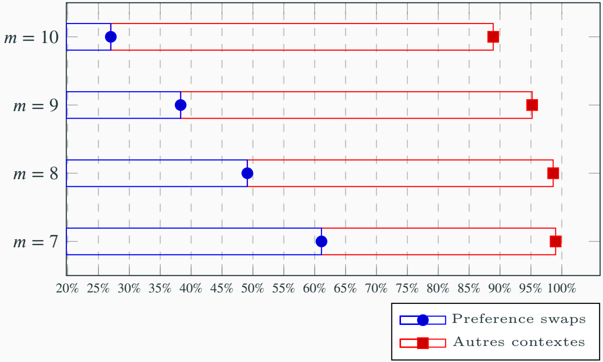
- $m \in [\![7; 10]\!]$
- $|\mathbf{A}| = 12$
- $|\mathbf{A}^R| \in m \pm 2$
- $\mathbb{P}\mathbb{I}$: classement sur $\mathbf{A}^R$

Ensembles $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^R$:

- Significativité des m critères
- Absence de dominance au sens de Pareto

Protocole expérimental : Génération indépendante d'instances jusqu'à l'obtention d'environ un millier de conclusions robustes.

Proportions de conclusions robustes justifiables



m	Preference swaps	Autres contextes
10	27.0%	88.9%
9	38.3%	95.2%
8	49.1%	98.6%
7	61.1%	99.0%

Conclusion et perspectives

Sommaire

Contribution générale

Explications en aide multicritère à la décision : schémas déductifs, algorithmes et expérimentations

Cadre d'étude : préférences additives, critères binaires et évaluation relative des alternatives (choix et rangement).

Une nouvelle approche de l'explication d'une comparaison par paire d'alternatives basée sur la définition explicite d'un CONTEXTE

Une relation binaire

Une relation d'ordre linéaire additive [Fishburn et al., 2002].

La relation nécessaire [Greco et al., 2008].

La relation induite par une fonction de score.

Une base de référence

Dominance Pareto

Paires critiques [Fishburn et al., 2002].

Preference swaps [Belahcène et al., 2017]

$\mathbb{P}\mathbb{I}$ [Kadzinski et al., 2014]

Sous-comparaisons structurellement non décomposables

Un schéma déductif

Construit à partir de propriétés correspondant à des modes de raisonnement intuitif pour le décideur [Payne et al., 1999].

Des algorithmes d'implémentation

Des analyses de complexité

Explication fondée sur un modèle de décision

Explication preuve de déduction

Contribution générale

Explications en aide multicritère à la décision : schémas déductifs, algorithmes et expérimentations

Cadre d'étude : préférences additives, critères binaires et évaluation relative des alternatives (choix et rangement).

Une nouvelle approche de l'explication d'une comparaison par paire d'alternatives basée sur la définition explicite d'un CONTEXTE

<u>Une relation binaire</u>

Une relation d'ordre linéaire additive [Fishburn et al., 2002].

La relation nécessaire [Greco et al., 2008].

La relation induite par une fonction de score.

<u>Une base de référence</u>

Dominance Pareto

Paires critiques [Fishburn et al., 2002].

Preference swaps [Belahcène et al., 2017]

ℙ𝕀 [Kadzinski et al., 2014]

Sous-comparaisons structurellement non décomposables

<u>Un schéma déductif</u>

Construit à partir de propriétés correspondant à des modes de raisonnement intuitif pour le décideur [Payne et al., 1999].

Des algorithmes d'implémentation

Des analyses de complexité

- ☛ Mesures expérimentales du pouvoir déductif des schémas/propriétés.
- ☛ Attribution de fonctions à l'Explication en AMCD.
- ☛ Traitement de l'inexplicabilité.

Doter l'analyste d'outils conceptuels et algorithmiques

L'**analyste**, cet spécialiste

doit expliquer <u>ce qu'il fait</u>

au **décideur**, cet amateur.

Publications

- 2 conférences JIAF

[Amoussou et al., 2022] Amoussou, M., Belahcene, K., Maudet, N., Mousseau, V., and Ouerdane, W. (2022). Des explications par étapes pour le modèle additif. In 16èmes Journées d'Intelligence Artificielle Fondamentale (JIAF 2022), Journées d'Intelligence Artificielle Fondamentale PFIA 2022, pages 35–48, Saint-Etienne, France. Association Française pour l'Intelligence Artificielle.

[Amoussou et al., 2023a] Amoussou, M., Belahcene, K., Maudet, N., Mousseau, V., and Ouerdane, W. (2023a). Des explications transitives questionnables au service de l'élicitation de préférences additives. Journées d'Intelligence Artificielle Fondamentale.

- 1 journal IJAR

[Amoussou et al., 2023b] Amoussou, M., Belahcène, K., Labreuche, C., Maudet, N., Mousseau, V., and Ouerdane, W. (2023b). Questionable stepwise explanations for a robust additive preference model. International Journal of Approximate Reasoning, page 108982.

- (Dans les tuyaux)
  - EJOR (en cours de révision)
  - [Amoussou et al, 2022] étendue.
- Transformer les éléments présentés aujourd'hui.

Sommaire

Tiré de [Labreuche et al., 2012] (Méthode de Condorcet pondérée).

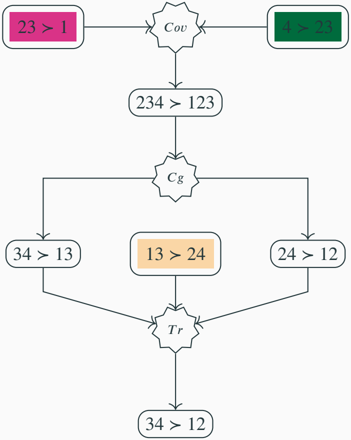
$$\mathbb{PI} = \left\{ 13 \succ 24, 23 \succ 1, 4 \succ 23 \right\}$$

Pourquoi 34 est une coalition gagnante ?

$\alpha_{23 \succ 1} = 2$

$\alpha_{13 \succ 24} = 1$ $\alpha_{4 \succ 23} = 1$

ou



Sommaire

Expérimentations exhaustives avec $\mathbb{CR}^{\star}_{\succ}$

$\mathbb{CR}^{\star}_{\succ}$: paires critiques non déductibles.

Lorsque $m = 4$ et

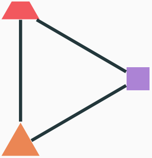
$\mathbb{CR}^{\star}_{\succ}$

aussi

Lorsque $m = 4, 5, 6$ et

$\mathbb{CR}_{\succ}$

alors



$\Longrightarrow \succ$

x_5	**0**	**1**
$\mathbf{P}(\#\mathsf{Unxp} \leq x_5)$	80.6%	95.7%

x_5	**2**	**3**
$\mathbf{P}(\#\mathsf{Unxp} \leq x_5)$	98.8%	100%

- Améliorer la sensibilité des algorithmes
- 🔎 Examiner les raisons d'inexplicabilité

🤔 S'expliquer pourquoi il en existe exactement :

4, 8 et 16 (2^{m-2}) avec $m = 4, 5, 6$

et la structure de leurs paires crititiques (x, y) :

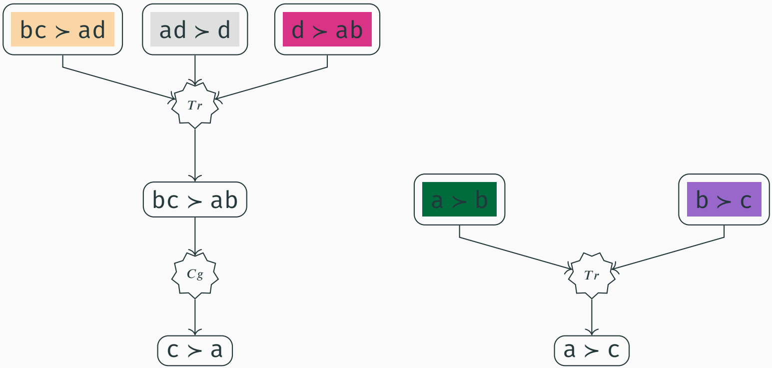
$\left|x\right| = 1$ ou $\left|y\right| = 1$

Sommaire

Expliquer l'inconsistance pour mieux la résoudre ?

$$\mathbb{PI} = \left\{ \mathsf{bc} \succ \mathsf{ad},\ \mathsf{d} \succ \mathsf{ab},\ \mathsf{a} \succ \mathsf{b},\ \mathsf{b} \succ \mathsf{c} \right\}$$

Expliquer des propositions contradictoires



Merci.

Serment

« En présence de mes pairs, parvenu à l'issue de mon doctorat en Informatique, et ayant ainsi pratiqué, dans ma quête du savoir, l'exercice d'une recherche scientifique exigeante, en cultivant la rigueur intellectuelle, la réflexivité éthique et dans le respect des principes de l'intégrité scientifique, je m'engage, pour ce qui dépendra de moi, dans la suite de ma carrière professionnelle quel qu'en soit le secteur ou le domaine d'activité, à maintenir une conduite intègre dans mon rapport au savoir, mes méthodes et mes résultats. »

Belahcène, K., Labreuche, C., Maudet, N., Mousseau, V., and Ouerdane, W. (2017).
Explaining robust additive utility models by sequences of preference swaps.
Theory and Decision, 82(2):151–183.

Belahcène, K., Labreuche, C., Maudet, N., Mousseau, V., and Ouerdane, W. (2019).
Comparing options with argument schemes powered by cancellation.
In 28th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-19) pages 1537–1543, Macao, Macau SAR China.

Fishburn, P. C., Pekec, A., and Reeds, J. A. (2002).
subset comparisons for additive linear orders.
Mathematics of Operations Research, 27:227–243.

Greco, S., Mousseau, V., and Sowiski, R. (2008).

Ordinal regression revisited : Multiple criteria ranking using a set of additive value functions.
European Journal of Operational Research, 191(2):416–436.

Kadzinski, M., Corrente, S., Greco, S., and Sowiski, R. (2014).
Preferential reducts and constructs in robust multiple criteria ranking and sorting.
Operations Research-Spektrum, 36:1021–1053.

Klein, D. A. (1994).
Decision-Analytic Intelligent Systems : Automated Explanation and Knowledge Acquisition.
L. Erlbaum Associates Inc., USA.

Labreuche, C., Maudet, N., and Ouerdane, W. (2012).
Justifying dominating options when preferential information is incomplete.
In Proceedings of the 20th European Conference on Artificial Intelligence, ECAI12, page 486491, NLD. IOS Press.

Maclagan, D. (1998).
Boolean term orders and the root system $\boldsymbol{B_n}$.
Order, 15:279–295.

Payne, J. W., Bettman, J. R., and Schkade, D. A. (1999).
Measuring constructed preferences : Towards a building code.
Journal of Risk and Uncertainty, 19(1-3):243–70.